

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS

853

KONSTRUKTSIOONIDE TUGEVUS
JA OPTIMISEERIMINE

ПРОЧНОСТЬ И ОПТИМИЗАЦИЯ
КОНСТРУКЦИЙ

Matemaatika-ja mehhaanika-alaseid töid

Труды по математике и механике

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS
ALUSTATUD 1893.a. VIHK 853 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ В 1893.г

KONSTRUKTSIOONIDE TUGEVUS
JA OPTIMISEERIMINE
ПРОЧНОСТЬ И ОПТИМИЗАЦИЯ
КОНСТРУКЦИЙ

Matemaatika-ja mehhaanika-alaseid töid
Труды по математике и механике

ТАРТУ 1989

Redaktsioonikolleegium: H. Lepik (esimees), M. Heinloo
(vastutav toimetaja), J. Leller, G. Olenov.

Редакционная коллегия: С. Лепик (председатель), М. Хейнлоо
(ответственный редактор), Я. Леллер, Г. Оленев.

ДИНАМИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ СЖАТЫХ БАЛОК

Лепик Ю.

Тартуский государственный университет

Продольный изгиб упругих и упругопластических балок при динамическом нагружении рассматривался во многих работах, обзор которых можно найти в монографиях [1, 2] или в статьях [4, 7]. Следует отметить, что в случае упругопластических деформаций решение таких задач является математически довольно сложным. Вследствие этого возникает мысль упростить ход решения, ограничиваясь лишь случаем жесткопластического материала. Такой подход реализуется в данной статье; исследуются два типа задач (случай заданного закона сближения концов балки, продольный удар балки массой). При этом исходят из кинематических гипотез Кирхгофа (как показано в работе [6], более точная модель Тимошенко даст лишь несущественные поправки). Выводятся основные уравнения проблемы, которые интегрируются численно. Даются границы применения полученных результатов.

1. Постановка задачи. Основные уравнения

Рассмотрим балку прямоугольного поперечного сечения; обозначим через B , h и l ширину, высоту и длину балки. Ось x^* направим вдоль оси балки, начало координат расположим в одном из концов балки. К балке приложена продольная сжимающая сила $P^*(t)$. Будем считать, что сила $P^*(t)$ настолько большая, что 1) в балке возникают пластические деформации, 2) начинается изгибание балки (т.е. происходит потеря устойчивости). Предположим еще, что отношение h/l настолько мало, что гипотезы Бернулли применимы.

Уравнения движения элемента балки имеют вид

$$\frac{\partial T^*}{\partial x^*} = \mu \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^{*2}}, \quad \frac{\partial^2 M^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial}{\partial x^*} \left(T^* \frac{\partial w^*}{\partial x^*} \right) = \mu \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*2}}. \quad (1.1)$$

Здесь u^* - продольное перемещение, w^* - прогиб, T^* - продольное усилие, M^* - изгибающий момент, t^* - время, μ - линейная плотность.

Перейдём к безразмерным величинам

$$\begin{aligned} x &= \frac{x^*}{l}, \quad t = \frac{t^*}{l} t^*, \quad c = \sqrt{\frac{\sigma_s}{\rho}}, \quad u = \frac{u^*}{l}, \quad w = \frac{w^*}{h}, \\ T &= \frac{T^*}{\sigma_s B h}, \quad M = \frac{4M^*}{\sigma_s B h^2}, \quad P = \frac{P^*}{\sigma_s B h}. \end{aligned} \quad (I.2)$$

Здесь σ_s - предел текучести, ρ - плотность материала.

Уравнения (I.1) приобретают теперь вид (точками обозначены производные по t , штрихами - производные по x)

$$T' = \ddot{u}, \quad M'' + 4(Tw')' = 4\ddot{w}. \quad (I.3)$$

Уравнение кривой текучести имеет форму

$$\frac{4M^*}{\sigma_s B h^2} = \pm \left[1 - \left(\frac{T^*}{B \sigma_s h} \right)^2 \right] \quad (I.4)$$

или в безразмерных величинах

$$M = \pm (1 - T^2). \quad (I.4')$$

В дальнейшем мы рассмотрим лишь балку со свободно опертыми концами, тогда $M > 0$ и в формулах (I.4) - (I.4') следует брать верхний знак. Деформации.

$$\varepsilon^* = u^* + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{l} \right)^2 w'^2, \quad \kappa^* = - \frac{h}{l^2} w'' \quad (I.5)$$

определим для пластической области из закона градиентальности

$$\begin{aligned} \varepsilon^* &= \Lambda \frac{\partial f}{\partial T^*} = \frac{2\Lambda}{\sigma_s B h} T, \\ \kappa^* &= \Lambda \frac{\partial f}{\partial M^*} = \frac{4\Lambda}{\sigma_s B h^2}, \end{aligned} \quad (I.6)$$

где $\Lambda > 0$. Исключая из формул (I.6) параметр Λ и учитывая соотношения (I.5), находим

$$u' = - \frac{\lambda}{2} (T w'' + w'^2). \quad (I.7)$$

Здесь обозначено для краткости $\lambda = (h/l)^2$.

В силу требования $\Lambda > 0$ должно быть $\varepsilon^* \leq 0$, $\kappa^* \geq 0$. Однако из (I.5) - (I.7) вытекает, что эти неравенства всегда выполнены.

Допустим, что в некотором сечении $x = \eta$ возникает пластический шарнир, а остальная часть балки остается жесткой.

Тогда имеем (f - стрела безразмерного прогиба)

$$\omega = \frac{x^2}{\eta} \text{ при } x \in [0, \eta], \quad \omega = \frac{1-x}{1-\eta} f \text{ при } x \in [\eta, 1]. \quad (I.8)$$

Проинтегрируем соотношение (I.7) в пределах $\eta - \varepsilon \leq x \leq \eta + \varepsilon$ и перейдем к пределу $\varepsilon \rightarrow 0$. Учитывая непрерывность величины T , ограниченность величины ω' и формулы (I.8), найдем

$$u(\eta+) - u(\eta-) = \frac{1}{2} \lambda f T(\eta) \frac{1}{\eta(1-\eta)}. \quad (I.9)$$

Следовательно, (если $T(\eta) \neq 0$) величина u имеет разрыв в точке $x = \eta$.

В жесткой области $\omega' = \text{const}$, $\varepsilon^* = u' + \frac{1}{2} \lambda \omega'^2 = 0$, следовательно, $u' = \text{const}$. Так как $u(0) = u_0$, $u(1) = 0$, то имеем

$$u = u_0 - \frac{1}{2} \lambda \left(\frac{f}{\eta} \right)^2 x \quad \text{для } x \in [0, \eta], \quad (I.10)$$

$$u = \frac{1}{2} \lambda \left(\frac{f}{1-\eta} \right)^2 (1-x) \quad \text{для } x \in (\eta, 1].$$

Выполняя ещё условие разрыва (I.9), находим

$$u_0 = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\eta(1-\eta)} f [f - T(\eta)]. \quad (I.11)$$

Интегрируем первое уравнение из (I.3). Дифференцируя формулы (I.10) два раза по x и подставляя в (I.3), находим

$$T(x) = -P + \ddot{u}_0 x - \frac{1}{2} \lambda x \left(\frac{x}{\eta} \right)^2 \quad \text{для } x \in [0, \eta], \quad (I.12)$$

$$T(x) = -P + \ddot{u}_0 \eta - \frac{1}{2} \lambda x \left(\frac{1-x}{1-\eta} \right)^2 \quad \text{для } x \in (\eta, 1],$$

где обозначено

$$z = \frac{1}{2} (f^2)'' = \dot{f}^2 + f \ddot{f}. \quad (I.13)$$

Переходим к интегрированию второго уравнения системы (I.3). Интегрируя опять это уравнение в пределах $(\eta - \varepsilon, \eta + \varepsilon)$ и учитывая непрерывность величин T и $\ddot{\omega}$, после предельного перехода $\varepsilon \rightarrow 0$ находим

$$M'(\eta+) - M'(\eta-) = \frac{4}{\eta(1-\eta)} f. \quad (I.14)$$

Далее интегрируем второе уравнение из (I.3) два раза по x , учитывая при этом формулы (I.12), краевые условия $M(0) =$

$= M(1) = 0$, непрерывность момента M при $x = \eta$ и условие разрыва (I.14). В результате находим

$$M = \frac{4Pf}{\eta} x - 2f\ddot{u}_0 x \left(\frac{x}{\eta} + \eta \right) + \frac{2}{3} \lambda x \frac{x^3}{\eta^3} + \frac{2}{3} f x \left(\frac{x^2}{\eta} - 2 + \eta \right), \quad x \in [0, \eta], \quad (\text{I.15})$$

$$M = \frac{1-x}{1-\eta} \left\{ 4Pf - 2f\eta(1+\eta)\ddot{u}_0 + \frac{2}{3} \lambda x = \frac{2}{3} \frac{(1-x)^2}{(1-\eta)^2} + \frac{2}{3} f \left[(1-x)^2 - 1 + \eta^2 \right] \right\},$$

$$x \in (\eta, 1].$$

Выполняя еще условие $M(\eta) = 1 - T^2(\eta)$, приходим к уравнениям

$$1 - T^2(\eta) = 4Pf - 2f\eta\ddot{u}_0(1+\eta) + \frac{2}{3} \lambda f \eta - \frac{4}{3} f \eta(1-\eta)f, \quad (\text{I.16})$$

$$T(\eta) = -P + \ddot{u}_0 \eta - \frac{1}{2} \lambda \eta.$$

Эти соотношения в существенной мере упрощаются, если пренебречь продольными силами инерции (согласно работе [4] это допустимо, если $\ddot{u}_0^*/a < 10^{-3}$, где a — скорость распространения упругой волны). В таком случае из первого уравнения (I.3) находим $T' = 0$, и, следовательно, $T = -P = \text{const}$. Формулы (I.9), (I.11), (I.14) — (I.16) остаются применимыми, если сделать следующие подстановки: $T(\eta) = -P$, $\ddot{u}_0 = 0$, $x = 0$. Это приводит нас к уравнениям

$$\frac{4}{3} \eta(1-\eta)f = 4Pf + P^2 - 1, \quad (\text{I.17})$$

$$P = \frac{2\ddot{u}_0 \eta(1-\eta)}{\lambda f} - f.$$

2. Случай заданного закона сближения концов балки

Рассмотрим случай, когда конец балки $x = 0$ перемещается с заданной постоянной скоростью v^* (такая задача характерна для нагружения стержня с помощью «жесткой» испытательной машины). Переходя к безразмерной скорости $v = v^*/c$, можем закон сближения концов написать в форме $u_0(t) = vt$. В начальной стадии нагружения балка деформируется чисто упруго, остается прямолинейной, и мы имеем (E — модуль упругости)

$$u(x, t) = vt - \frac{\sigma_y}{E} P(t) x. \quad (\text{2.1})$$

В некоторый момент времени $t = t_0$ в балке достигается пластическое состояние, и мы имеем $P = 1$. Так как $u(1, t) = 0$, то из (2.1) находим

$$vt_0 = \frac{\delta_A}{E} \quad (2.2)$$

При $t > t_0$ начинается выпучивание балки, и приходится интегрировать уравнения (I.II), (I.I6) или, если возможно пренебречь влиянием продольных инерциальных сил, то — уравнения (I.I7), заменяя там $u_0 = vt$. Это можно сделать численно (например, методом Рунге-Кутты). Рассмотрим еще, как задать начальные значения. Интегрирование начнем с момента времени $t = t_0$. Принимая в (I.II) $u_0 = vt_0$, $T(\eta) = -P = -1$, находим

$$\dot{f}(t_0) = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2}{\lambda} vt_0 \eta (1 - \eta)} \quad (2.3)$$

Надо найти еще $\ddot{f}(t_0)$. Для этого продифференцируем уравнение (I.II), так как $\dot{f}(t_0) \ll 1$, то после отбрасывания членов более высокого порядка получим

$$\ddot{f}(t_0) = \frac{2}{\lambda} v \eta (1 - \eta) \quad (2.4)$$

При интегрировании находим зависимость $\dot{f} = \dot{f}(t)$, а также контактную силу $P = P(t)$. После каждого шага надо проверить, чтобы $|T(x)| \leq 1$ и $|M(x)| \leq |1 - T^2(x)|$ для $\forall x \in [0, 1]$.

Данное решение имеет место, если потеря устойчивости не произошла в упругой области. Критическая нагрузка для упругой балки равняется

$$P_{кр} = \pi^2 E B \ell^3 / (12 \ell^2) \quad \text{или в безразмерной форме}$$

$$P_{кр} = \pi^2 E \lambda / (12 \delta_A)$$

Так как на пределе текучести $P_{кр} = 1$, то получаем неравенство

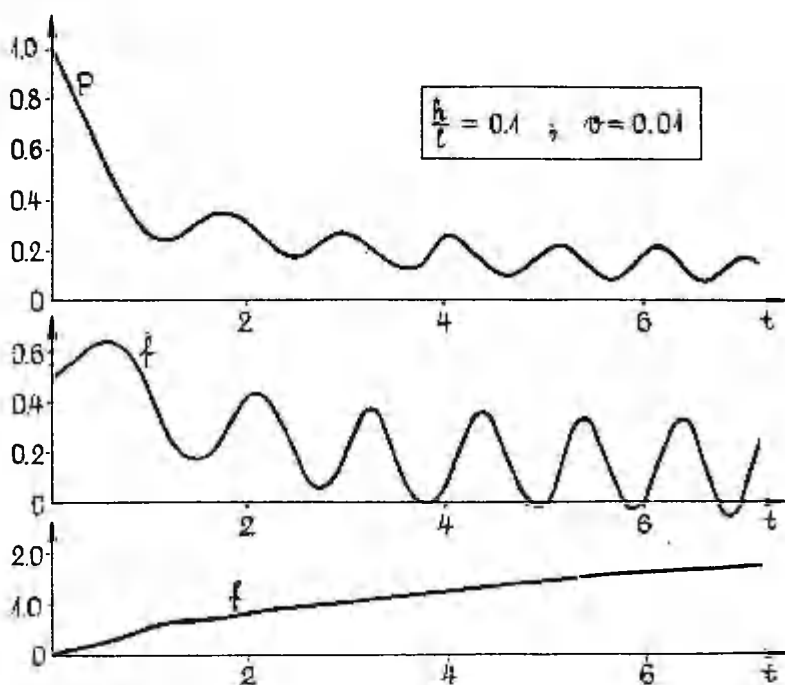
$$\lambda = \left(\frac{h}{\ell} \right)^2 > \frac{12 \delta_A}{\pi^2 E} \quad (2.5)$$

при котором жестко-пластический анализ послекритической стадии возможен.

Реальные скорости движения сближения концов балки настолько малы, что мы можем пренебрегать продольными силами инерции и интегрировать упрощенную систему уравнений (I.I7). При весьма малых скоростях нагружения имеет место статическое решение, для которого $\ddot{f} = 0$. Из системы (I.I7) теперь находим

$$\dot{f} = \frac{1}{4P} (1 - P^2), \quad t = \frac{1}{16P^2} (1 + 3P^2) (1 - P^2) \quad (2.6)$$

Из этих соотношений вытекает, что с ростом времени контактная сила P монотонно убывает, а прогиб f монотонно увеличивается. С увеличением скорости нагружения v зависимость $P=P(t)$ имеет колебательный характер. Это обстоятельство иллюстрируется на фиг. I, где представлены результаты вычислений для параметров $h/l = 0,1$; $\eta = 0,5$; $v = 0,01$.



Фиг. I.

Из этой фигуры вытекает, что колебания имеют место и для скорости поперечного изгиба \dot{f} . Что касается величины η , то вычисления показали, что наибольшие прогибы появляются при $\eta = 0,5$ (т.е. когда пластический шарнир возникает в середине балки).

3. Продольный удар массой

Пусть теперь на конец балки $x=0$ падает масса \mathcal{G} со скоростью η^* . Если ударный импульс достаточно велик, то в балке возникают пластические деформации и начинается изгибание. При этом контактная сила определяется из формулы

$$P^*(t) = -\mathcal{G} \left. \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^{*2}} \right|_{x=0}$$

Перейдем к безразмерным величинам (1.2), кроме того, введём параметр $\kappa = \mathcal{G}/(qBkl)$ (т.е. отношение ударяющей массы к массе балки); в результате получим

$$P = -\kappa \ddot{u}_0. \quad (3.1)$$

Преобразуем основные уравнения проблемы (1.11), (1.16), (3.1). Исключая величины $T(\eta)$ и P при помощи уравнений (1.11) и (3.1), можем второе уравнение системы (1.16) представить в форме

$$(\kappa + \eta) \ddot{u}_0 = f - \frac{2\eta(1-\eta)}{\lambda} \frac{u_0}{f} + \frac{1}{2} \lambda x. \quad (3.2)$$

Первое уравнение из (1.16) после исключения величин \ddot{u}_0 , $T(\eta)$, P приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \eta(1-\eta) \ddot{f} = \frac{4}{\kappa + \eta} \left\{ -\frac{1}{3} \eta f x (4\kappa + \eta + 3\eta^2) - 2[2\kappa + \eta(1+\eta)] f^2 + \right. \\ \left. + \frac{4\eta(1-\eta)u_0}{\lambda} [2\kappa + \eta(1+\eta)] \right\} + \left[f - \frac{2}{\lambda} \frac{\eta(1-\eta)}{f} u_0 \right]^2 - 4. \end{aligned} \quad (3.3)$$

После того, как уравнения (3.2) - (3.3) будут разрешены относительно старших производных \ddot{f} и \ddot{u}_0 , можно их численно интегрировать. Функции $T(x)$ и $M(x)$ определим по формулам (1.12), (1.15), причем опять должно быть

$$|T(x)| \leq 1; \quad |M(x)| \leq |1 - T^2(x)| \quad \text{для } \forall x \in [0, 1].$$

Система основных уравнений (3.1) - (3.3) опять значительно упрощается, если можно пренебречь продольными силами инерции; в таком случае придётся интегрировать уравнения (1.17) и (3.1). Рассмотрим, при каких условиях такое упрощение возможно. Исключая из уравнений (3.1), (3.2) и (1.11) величины u_0 и \ddot{u}_0 , находим

$$P(1 + \frac{\eta}{\kappa}) = -T(\eta) - \frac{1}{2} \lambda x. \quad (3.4)$$

Если не учитывать продольные силы инерции, то имеем $P = -T(\eta)$, и согласно формуле (3.4) должно быть

$$\eta \ll \infty, \quad \lambda z = \lambda(\dot{\eta}^2 + \ddot{\eta}^2) \ll 1. \quad (3.5)$$

Для начального момента времени $t=0$ второе условие из (3.5) можно представить в виде

$$\sigma \ll \frac{\sqrt{\lambda}}{2\eta(1-\eta)}. \quad (3.6)$$

Таким образом, видим, что при скоростях падения, удовлетворяющих неравенству (3.6), можно пренебрегать продольными силами инерции.

Начальные условия для рассматриваемой задачи составим следующим образом. В начале удара балка деформируется упруго (без изгибания), при этом контактная сила увеличивается. Если скорость удара достаточно велика, то с развитием деформаций в балке возникает пластическое состояние (время t будем отсчитывать с этого момента времени). При $t > 0$ в сечении $x = \eta$ возникает пластический шарнир и начинается выпучивание (при описании этого процесса мы упругими деформациями уже пренебрегаем). Таким образом, начальными условиями являются

$$u_0(x, 0) = f(x, 0) = 0, \quad \dot{u}(x, 0) = \begin{cases} \sigma & \text{при } x = 0, \\ 0 & \text{при } x \neq 0. \end{cases}$$

Кроме того, имеем $T(\eta) = -1$ при $t = 0$.

При $t = 0$ в уравнениях (3.2) - (3.3) появляется неопределенность u_0/f , от неё можно освободиться при помощи правила Лопиталья

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{u_0}{f} = \frac{\sigma}{\dot{f}(0)} = \frac{\lambda}{2\eta(1-\eta)}. \quad (3.7)$$

Определим еще минимальную скорость, при которой пластическое деформирование возможно. Для этого потребуем, чтобы кинетическая энергия ударяющей массы была больше максимальной упругой потенциальной энергии балки, т.е.

$$\frac{1}{2} M \sigma^2 > \frac{\sigma_A^2}{2E} B h l$$

или в безразмерных величинах

$$\sqrt{\lambda} \sigma > a, \quad \left(a = \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{E}} \right). \quad (3.8)$$

При весьма высоких скоростях удара формула (3.8) может оказаться неточной, так как при выводе ее мы не учитывали

волнового процесса при ударе. С целью получения более точной формулы вместо (3.8) придется проинтегрировать волновое уравнение.

Это сделано уже во многих монографиях. Здесь мы используем результаты работы [5] (см. стр. 402), где представлены формулы для определения максимальных сжимающих напряжений при разных значениях ε . Принимая в этих формулах $\delta_{max} = \delta_*$, получим формулы для скоростей, при которых имеет место пластический удар:

$$\begin{aligned} (1 + e^{-2/\varepsilon})v &> a, & \text{при } \varepsilon < 5, \\ (\sqrt{\varepsilon} + 1,1)v &> a, & \text{при } 5 < \varepsilon < 24, \\ (\sqrt{\varepsilon} + 1)v &> a, & \text{при } \varepsilon > 24. \end{aligned}$$

Минимальные скорости v , вычисленные по этим формулам, немного меньше, как это следует из формулы (3.8).

Существует и верхняя граница для скорости v . Учитывая, что $T(\eta) = -1$, $\varepsilon = \frac{1}{2} \dot{\eta}^2$ при $t = 0$, из (3.4) находим

$$P = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \eta} \left(1 - \frac{1}{2} \dot{\eta}^2\right) < 1.$$

Так как $P > 0$, то $\dot{\eta}_0^2 < 2/\lambda$. На основании (3.7) получим

$$v < \frac{1}{\sqrt{2} \eta (1 - \eta)} \frac{h}{l}. \quad (3.9)$$

Принимая, например, $\eta = 0,5$; $h/l = 0,05$; $a = 0,05$; $\varepsilon = 5$, увидим, что $0,022 < v < 0,141$. Если начальная скорость удара v не удовлетворяет неравенству (3.9), то наша исходная схема с одним пластическим шарниром неуместна и потеря устойчивости возникает при нескольких пластических шарнирах (это явление впервые было описано в работе [3] М.А.Лаврентьева и А.Ю.Ишлинского), но этот случай в данной статье не рассматривается.

Для того, чтобы потеря устойчивости произошла в области пластических деформаций, должно быть выполнено ещё неравенство (2.5).

Из проведённых вычислений вытекает, что контактная сила P постепенно уменьшается и наступает момент времени $t = t_*$, когда $P = 0$. Далее имеют место три следующие возможности.

1) Если $\dot{u}_0(t_*) < 0$, то удар закончен и ударяющая масса отлетает от стержня с постоянной скоростью $\dot{u}_0(t_*)$. Коэффициент восстановления можно определить из формулы $\varphi = |\dot{u}_0(t_*)|/v$.

2) Если $0 < \dot{u}_0(t_1) < a/\sqrt{x}$, то согласно формуле (3.8) балка затвердевает и движение прекращается.

3) Если $\dot{u}_0(t_1) > a/\sqrt{x}$, то происходит вторичный удар. Проанализируем этот случай подробнее.

Перед повторным ударом балка становится жесткой, контактная сила P увеличивается и снова начинается выпучивание. В отличие от первого удара теперь имеем балку с начальной прогибью $f(t_1) = f_1$. Проводя такие же преобразования, как в § I, теперь вместо (I.II) получим

$$u_0 = \frac{\lambda}{2\eta(1-\eta)}(f - f_1)[f + f_1 - T(\eta)] \quad (3.10)$$

Уравнения (3.2) и (3.3) приобретают вид

$$(x + \eta)\ddot{u}_0 = f + f_1 - \frac{2\eta(1-\eta)}{\lambda(f - f_1)}u_0 + \frac{\lambda}{2}z, \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}\eta(1-\eta)\ddot{f} = \frac{1}{x + \eta} \left\{ -\frac{2}{3}fz(4x + \eta + 3\eta^2) - 2[2xz + \right. \\ \left. + \eta(1+\eta)]f(f + f_1) + \frac{4\eta(1-\eta)}{\lambda}[2x + \eta(1+\eta)]\frac{u_0 f}{f - f_1} \right\} + T^2(\eta) - 1. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Эта система, если включить сюда еще формулу (3.1), достаточно для определения величин P , $T(\eta)$, u_0 , f .

Некоторого объяснения требует определение начальных условий для момента времени $t = t_1$. Для простоты примем $u_0(t_1) = 0$, кроме того, нам известна начальная скорость второго удара $\dot{u}_0(t_1) = v_1$. Совершая предельный переход в формуле (3.10), находим

$$\frac{v_1}{f_1} = \lim_{f \rightarrow f_1} \frac{u_0}{f - f_1} = \frac{\lambda}{2\eta(1-\eta)}[2f_1 - T(\eta)] \quad (3.13)$$

Такой же переход выполним и в уравнениях (3.11)-(3.12), учитывая еще уравнение (3.1) и обстоятельство, что $\dot{f}(t_1) = 0$, увидим, что уравнение (3.4) сохраняет свой прежний вид, а уравнение (3.12) можно представить в форме

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\eta}{x}\right)^2 P^2 + \left[2\left(2 + \frac{\eta}{x}\right)f_1 + \lambda z_1\left(1 + \frac{\eta}{x}\right)\right]P - \\ - 1 + \left(\frac{\lambda}{2}z_1\right)^2 + \frac{2}{3}\lambda z f_1 = 0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где $z_1 = \dot{f}_1^2$.

Систему уравнений (3.4), (3.13) и (3.14) решаем итерационным методом. Для этого выбираем некоторое начальное значение

для $T(\eta)$ (принимая, например, $T(\eta) = -1$). Затем определим величину \dot{f}_1 из уравнения (3.13) и контактную силу P из квадратного уравнения (3.14). Этот процесс повторяем, пока нужная точность не будет достигнута (конкретные вычисления показали быструю сходимость этого метода).

Отметим, что скорость поперечного прогиба \dot{f} претерпевает при $t = t_1$ скачок. Для определения этого скачка продифференцируем по времени соотношение (1.11). В результате находим

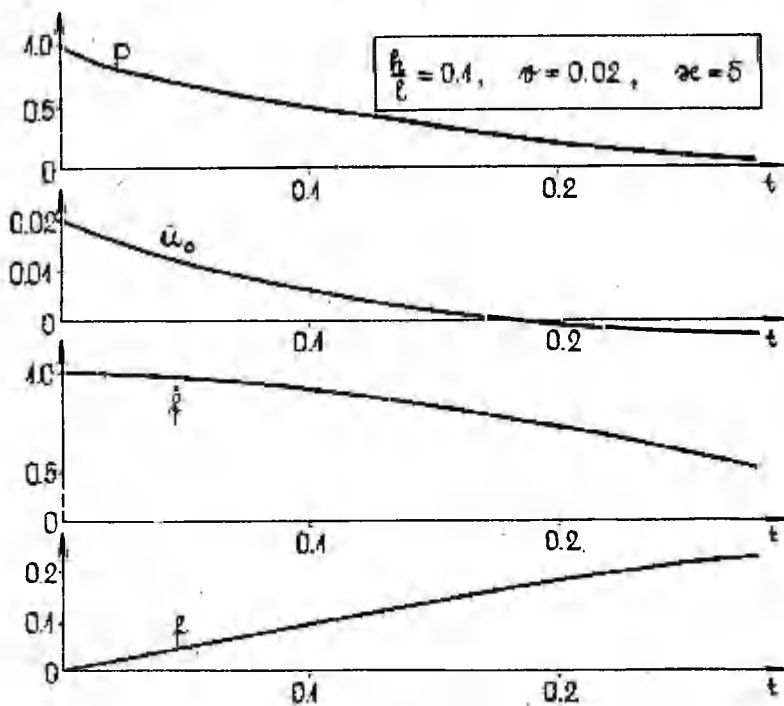
$$\frac{2\eta(1-\eta)}{\lambda} \dot{u}_0(t_1) = [2f_1 - T(\eta)]\dot{f}(t_1-) - f_1\dot{T}(\eta).$$

Сравним этот результат с формулой (3.13). Учитывая непрерывность величин \dot{f} , \dot{u}_0 , $T(\eta)$, находим

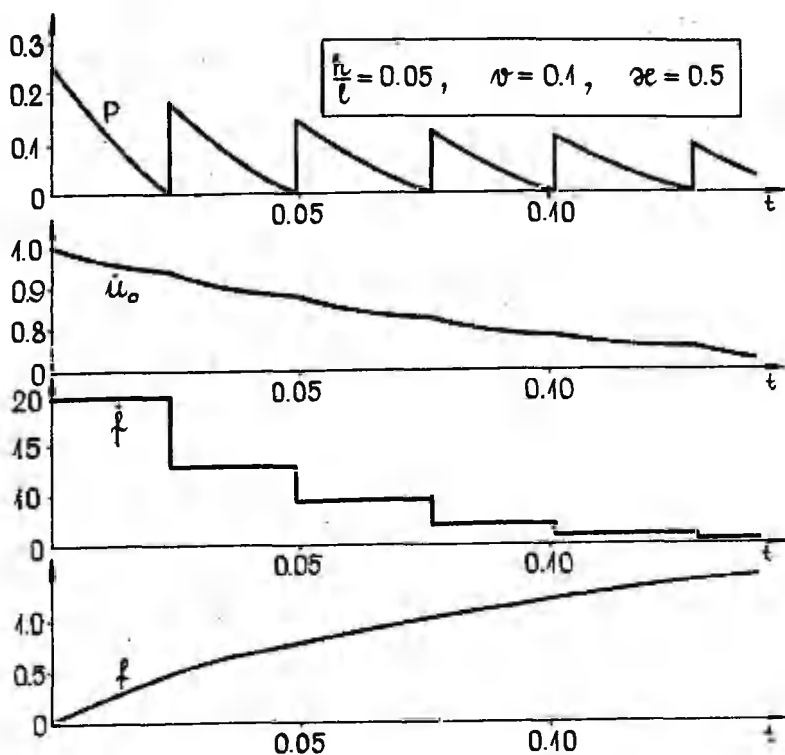
$$[2f_1 - T(\eta)] \cdot [\dot{f}(t_+) - \dot{f}(t_-)] = -f_1\dot{T}(\eta);$$

так как $T(\eta) < 0$ и монотонно возрастает, то

$$\dot{f}(t_+) < \dot{f}(t_-). \quad (3.15)$$



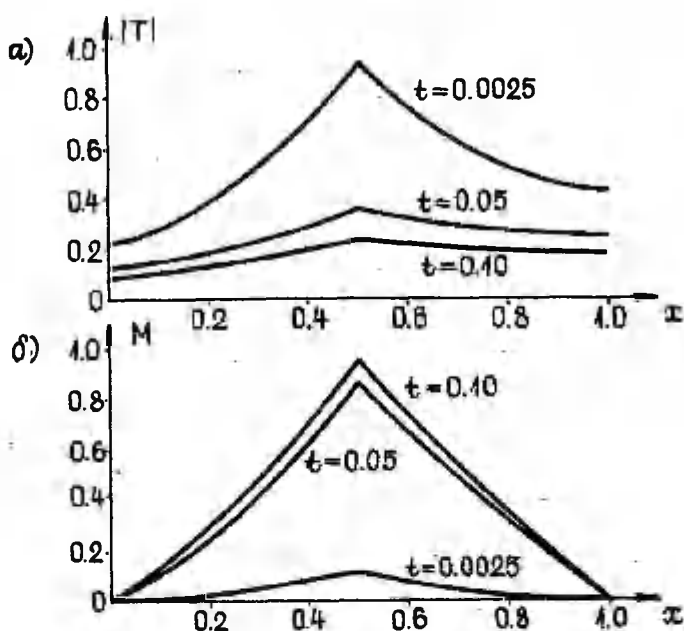
Дет. 2.



Фиг. 3.

Если второй удар закончится, то возможен и третий и последующие удары (при проведении расчетов было зарегистрировано несколько тысяч ударов). Этот процесс заканчивается опять, если на i -том ударе $\dot{u}_0(t_i) < \alpha/\sqrt{\alpha_c}$. С увеличением скорости падения массы α возникает ситуация, где прогибы $f(t)$ превышают заданное значение f_{\max} , а процесс удара еще продолжается. В таких случаях мы будем считать, что балка потеряла свою несущую способность; соответствующую скорость α будем называть критической.

Представим некоторые результаты расчетов. Графики величин P , \dot{u}_0 , f , f как функций от времени представлены на Фиг. 2-3; в первом случае реализуется однократный, во втором - многократный удар. Для второго случая составлены еще



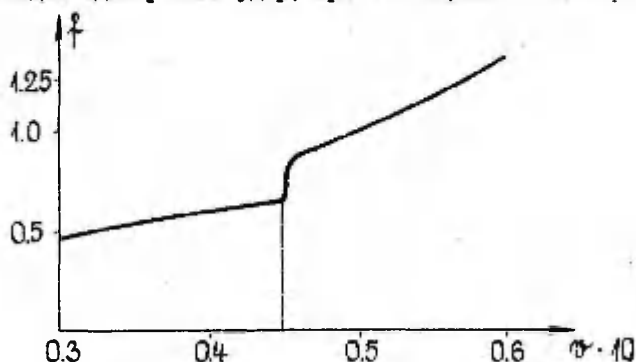
Фиг. 4.

эпюры продольной силы T и изгибающего момента для трех моментов времени (фиг. 4). Критические скорости для некоторых значений параметра α даны в таблице I; расчет проведён при $\alpha = 0,05$; $f_{max} = 3$. Значения $v_{кр}^{(1)}$ соответствуют случаю $k/l = 0,05$; значения $v_{кр}^{(2)}$ вычислены при $k/l = 0,1$. С увеличением ударной скорости v происходит переход от одно-

Табл. I

α	$v_{кр}^{(1)}$	$v_{кр}^{(2)}$
0,25	0,140	0,211
0,50	0,133	0,186
1	0,108	0,157
2,5	0,054	0,119
5	0,043	0,092
10	0,033	0,070
25	0,023	0,047

кратного удара к многократным; вычисления показывают, что в этот переходный момент времени прогибы и время движения увеличиваются скачком; этот эффект продемонстрирован на фиг.5; вычисления проведены для $h/l = 0,1$; $\kappa = 5$; при $\mu < 0,045$ происходит однократный удар, при $\mu > 0,045$ - многократный.



фиг. 5.

Все эти вычисления были проведены при $\eta = 0,5$. Путем конкретных расчетов выяснено, что в случае $\eta \neq 0,5$ или не выполняются неравенства $|T| < 1$, $M + T^2 < 1$, или прогибы будут меньшими, чем в случае $\eta = 0,5$. Отсюда можно сделать вывод, что случай $\eta \neq 0,5$ практического значения не имеет.

Интересно было бы сопоставить полученные результаты с экспериментальными данными. Но, к сожалению, все известные автору исследования проведены при настолько больших гибкостях балок, при которых потеря устойчивости происходит при упругих деформациях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С., Устойчивость упругих систем. М., Гос. изд. физ.-мат. лит., 1963.
2. Вольмир А.С., Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М., "Наука", 1972.
3. Лаврентьев М.А., Ишлинский А.Ю., Динамические формы потери устойчивости упругих систем. ДАН СССР, 1949, 64, № 6, 779-782.

4. Мовсисян Л.А., К устойчивости упруго-пластических стержней при ударных нагрузениях. Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1986, 39, № 2, 15-23.
5. Тимошенко С.П., Колебания в инженерном деле. М., Гос. изд. физ.-мат. лит., 1959.
6. Lee L.H.N., Dynamic buckling of an inelastic column. Int. J. Solids Struct., 1981, 17, № 3, 271-279.
7. Sugiura K., Mizuno E., Fukumoto Y., Dynamic instability analyses of axially impacted columns. J.Appl. Mech., 1985, 111, № 7, 893-908.

Dynamic response of rigid-plastic axially compressed beams

Ü.Lepik

Summary

Analysis of elastic-plastic beams under dynamic axially compressing loads is mathematically quite complicated, therefore simplifications obtained by making use of the model of a rigid-plastic body are desirable. This is the topic of the present paper. The material of the beam is assumed to be rigid-plastic (without strain hardening) and to obey the associated deformation law. It is supposed that a single plastic hinge appears in the beam (which may be located in an arbitrary cross-section). Two types of loading are considered: (i) one end of the beam is displaced axially at a constant speed (§ 2), (ii) the beam is struck by a constant mass body (§ 3). These problems were solved numerically, the main results are demonstrated in Fig. 1 - 5. Bounds of validity of the obtained solutions are discussed.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СТУПЕНЧАТЫХ БАЛОК ОПТИМАЛЬНОЙ КОНФИГУРАЦИИ ПРИ НАГРУЖЕНИИ ПАДАЮЩЕЙ МАССОЙ

А.П.Дзюба, В.В.Костырко

Днепропетровский государственный университет

Ю.Лепик

Тартуский государственный университет

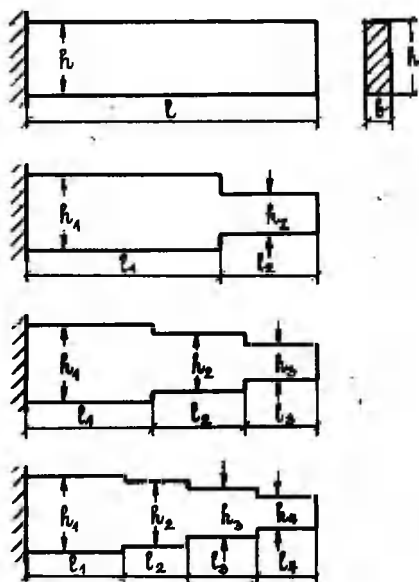
При проектировании и исследовании свойств конструкций с оптимальными параметрами в настоящее время преобладающими являются теоретические методы с дальнейшим анализом результатов, полученных, как правило, численно. Экспериментальная же проверка свойств проектов с оптимальными параметрами, позволяющая сделать окончательное заключение об их преимуществах, а следовательно, и прикладном значении используемых методов исследования, выполняется довольно редко.

Настоящая работа как раз и посвящена подобной проверке, проведенной на примере балок, спроектированных из условия минимума максимальных прогибов под действием ударной нагрузки.

Методика расчета и соответствующий алгоритм получения оптимальных параметров балки, подверженной динамическим воздействиям, разработан в статье [1]. В эксперименте путем сравнения максимальных прогибов, возникающих при статическом нагружении и под действием ударной нагрузки, оценивалась эффективность работы 2-х, 3-х, 4-ступенчатых балок оптимальной конфигурации по сравнению с балкой постоянного сечения, изготовленной из такого же количества материала.

Объект исследования представлял собой консольную балку с постоянным или ступенчатым изменением высоты прямоугольного поперечного сечения по длине (фиг. 1).

Модели изготавливались из оргстекла с удельным весом $\rho = 0,1106 \cdot 10^4$ кг/м³, обладающего хорошими упругими свойствами и высокой технологичностью. Длина консоли и ширина поперечного сечения балки для всех случаев были одинаковыми: $l = 25$ см, $b = 0,27$ см. Высота сечения балки постоянного сечения принималась $h = 1,12$ см, и в дальнейшем объем (вес) материала для всех испытуемых балок был одинаковым



Фиг. 1.

$$V = 7,560 \text{ см}^3$$

$$(G = 0,836 \text{ н}).$$

Изменение высоты сечения ступенчатых балок оптимальной конфигурации назначалось в соответствии с данными табл. 2, 4, 5 статьи [1], случай 13 при $\beta = 1$ (вес падающего груза равен весу материала балки). В результате получено для 2-ступенчатой балки

$$l_1 = 17,5 \text{ см},$$

$$h_1 = 1,31 \text{ см},$$

$$l_2 = 7,5 \text{ см},$$

$$h_2 = 0,7 \text{ см},$$

для 3-ступенчатой балки

$$h_1 = 1,41 \text{ см},$$

$$h_2 = 1,10 \text{ см},$$

$$h_3 = 0,59 \text{ см},$$

$$l_1 = 10,75 \text{ см},$$

$$l_2 = 8,5 \text{ см},$$

$$l_3 = 5,75 \text{ см},$$

для 4-ступенчатой балки

$$l_1 = 8 \text{ см},$$

$$l_2 = 5,5 \text{ см},$$

$$l_3 = 6,25 \text{ см},$$

$$l_4 = 5,25 \text{ см},$$

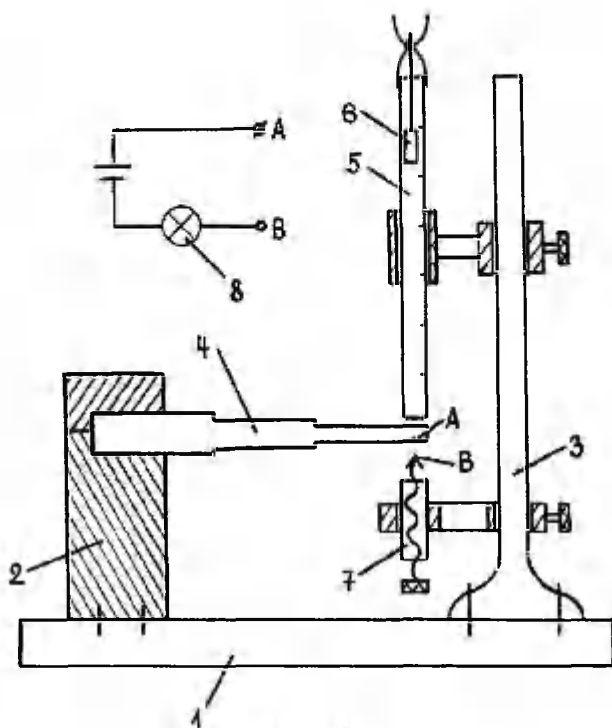
$$h_1 = 1,47 \text{ см},$$

$$h_2 = 1,26 \text{ см},$$

$$h_3 = 1,00 \text{ см},$$

$$h_4 = 0,59 \text{ см}.$$

Для определения модуля упругости материала была проведена серия опытов по измерению прогиба балки под действием статически приложенного сосредоточенного груза P на конце консоли при различных значениях P и l . После статистической обработки данных, полученных с использованием формулы $E = \frac{Pl^3}{3WJ}$, было принято $E = 2,70 \text{ ГПа}$.



Фиг. 2.

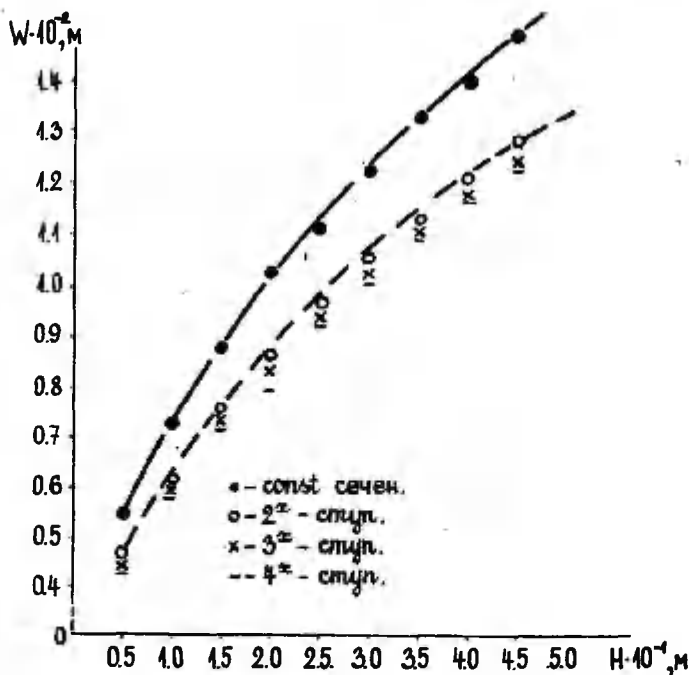
Установка для испытаний, принципиальная схема которой приведена на фиг. 2, состояла из монолитного основания I, жестко крепящегося к нему массивного штатива 2 и рейсмус-штанги 3. Штатив 2 служил для жесткого крепления к нему объекта исследования (балки) 4. На рейсмус-штангу 3 подвижно устанавливалась стеклянная трубка 5 со шкалой с ценой деления 1 мм и устройством для сбрасывания грузов, а также микрометрический винт 7. Электрическая цепь соединяла контакт на конце балки в точке A и головку микрометрического винта (точка B). При замыкании контакта загоралась лампочка 8.

Высота сбрасывания H_i ($i = \overline{1, n}$), определяющая скорость $v_0 = \sqrt{2gH_i}$ груза в момент удара, контролировалась по шкале трубки 5. Устройство для сбрасывания обеспечивало нулевое значение скорости груза в верхней точке и идентичность начальных условий в различных попытках. Нулевое положение головки микрометрического винта 7 ($W = 0$) устанавливалось по

замыканию электрической цепи (загоранию лампочки 8). Далее устанавливался начальный зазор ω_0 . Значение прогиба балки ω в точке А под действием ударной нагрузки определялось методом половинного деления по схеме: есть контакт – нет контакта и дальнейшего выбора точки в середине промежутка. Факт контакта балки фиксировался по колебаниям лёгкого металлического колпачка, установленного на головке микрометрического винта 7, который при соприкосновении с балкой легко выводился из равновесия. Отметим, что, несмотря на простоту, подобный способ регистрации контакта оказался значительно эффективней, чем использование электрических цепей, где индикаторами служили осциллографы.

Для определения ω_{max} оказывалось необходимым 10 – 20 сбрасываний груза. Все опыты были проведены трижды для груза, вес которого равен весу материала балки ($G = 0,836$ н) (случай $\beta = 1$ работы [1]).

Результаты эксперимента представлены на фиг. 3 и в таб-



Фиг. 3.

Таблица 1

Результаты экспериментальных исследований
ступенчатых балок оптимальной конфигурации при динамическом нагружении

№ № пр.	$H(\mu)$	$\nu_0 \left(\frac{\Delta \sigma}{\sigma_0} \right)$	$M_{\text{соед.}} \cdot 10^3 (\mu)$	$M_{\text{нап.}} \cdot 10^3 (\mu) (2^{\text{е ступ.}})$		$M_{\text{нап.}} \cdot 10^3 (\mu) (3^{\text{е ступ.}})$		$M_{\text{нап.}} \cdot 10^3 (\mu) (4^{\text{е ступ.}})$	
				α	δ	α	δ	α	δ
1.	0,0	0,0	0,50	0,35	-	0,30	-	0,25	-
2.	0,05	0,9905	5,38	4,58	4,76	4,39	4,59	4,24	4,54
3.	0,10	1,4007	7,28	6,03	6,44	6,02	6,21	5,84	6,14
4.	0,15	1,7155	8,72	7,57	7,71	7,33	7,44	7,16	7,36
5.	0,20	1,9809	10,22	8,56	9,04	8,34	8,72	7,93	8,63
6.	0,25	2,2147	11,06	9,70	9,79	9,36	9,43	9,25	9,33
7.	0,30	2,4261	12,17	10,55	10,77	10,24	10,38	10,04	10,27
8.	0,35	2,6205	13,27	11,25	11,75	11,04	11,32	10,83	11,20
9.	0,40	2,8014	14,03	12,08	12,42	11,71	11,97	11,64	11,85
10.	0,45	2,9714	14,98	12,75	13,25	12,38	12,77	12,21	12,64

лице I. Полученные зависимости максимального прогиба балки от высоты сбрасывания (начальной скорости груза) подтверждают повышение эффективности использования материала с увеличением числа ступеней проекта. Так, например, снижение максимального прогиба балки оптимальной конфигурации по сравнению с консолью постоянного сечения для 4-ступенчатого проекта составляет более 15%.

Кроме того, проведенные испытания продемонстрировали и хорошее количественное совпадение с расчетными данными. Действительно, отношения максимальных перемещений балок ступенчатого профиля и постоянного сечения ($\delta = \frac{w_{\text{опт}}}{w_{\text{конст}}}$) для 2-х, 3-х, 4-х ступеней изменения жесткости балки в соответствии с результатами работы [I] (табл. 4, 5, 6, случай I3) равны: $\delta_2 = 0,885$, $\delta_3 = 0,853$, $\delta_4 = 0,844$. В таблице I настоящей работы приведены экспериментальные значения $w_{\text{опт}}$ (колонка "а") и для сравнения (колонка "б") - результаты умножения максимального прогиба $w_{\text{конст}}$ балки постоянного сечения на соответствующий коэффициент δ_k ($k = 1, 2, 3$). Полученное отличие данных составляет не более 3+5%.

Проведенные экспериментальные исследования подтверждают достоверность методики [I] проектирования ступенчатых балок оптимальной конфигурации при динамических воздействиях и указывают на целесообразность их практического использования, поскольку такие конструкции обладают более высокими жесткостными качествами, чем балки постоянного сечения, изготовленные из того же количества материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lepik Ü., Optimal design of elastic beams with segment-wise constant height in the case of dynamic loading. Int. J. Impact. Engng., 1985, 3, № 2, 77-91.
2. Экспериментальные методы исследования деформаций и напряжений (под ред. Б.С.Касаткина). Киев, „Наукова думка“, 1981.

Experimental investigation of stepped beams with optimal configuration struck transversely by a mass
A.Dzjuba, B.Kostyrko, Ü.Lepik.

Summary

In paper [1] for the problem of optimal design of elastic stepped beams, struck transversely by a mass, a theoretical solution was given. Experimental tests, which are described in the present paper, agree well with the results of the paper [1].

ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ БАЛОК

С ФИКСИРОВАННЫМИ КОНЦАМИ

Т. Лепикулт

Тартуский государственный университет

Рассматривается динамическое поведение жесткопластических ступенчатых балок с несмещающимися опорами. Изложена методика решения задачи на ЭВМ.

1. Постановка задачи

На жесткопластическую балку кусочно-постоянной высоты и прямоугольного поперечного сечения в некотором промежутке времени действует поперечная нагрузка. Концы балки могут быть зашпелены или свободно оперты. Опоры не могут перемещаться в осевом направлении, так что при изгибании балки возникают продольные силы. Предполагаем, что максимальная нагрузка выше предельной. Тогда некоторые части балки (или вся балка) переходят в пластическое состояние. Движение балки кончается в момент времени, когда вся кинетическая энергия, приобретенная в процессе нагружения, расходуется на пластическую работу. Поставим задачу найти остаточные прогибы балки. Остаточные прогибы предполагаем настолько малыми, что продольную силу, возникающую в процессе деформирования, можно считать постоянной величиной относительно координаты вдоль оси балки.

2. Основные уравнения

Представим уравнение движения балки в виде

$$\frac{\partial^2 M^*}{\partial x^2} = -N^* \frac{\partial^2 \omega^*}{\partial x^2} + \rho B h(x) \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial t^2} - p^*(x, t), \quad (I)$$

где ω^* - прогиб, M^* - изгибающий момент, N^* - продольная сила, B, h - ширина и высота балки соответственно, ρ - плотность материала, x - координата вдоль оси балки, t - время, p^* - давление.

Введем еще следующие обозначения: V и 2ℓ - объем и длина балки соответственно, $h^* = V/(2B\ell)$ - средняя высота,

σ_A - предел текучести материала. Тогда кривая предельного состояния сечения балки имеет вид

$$\frac{M^*}{M_A} = \pm \left(\left(\frac{h(x)}{h^*} \right)^2 - \left(\frac{N^*}{N_A} \right)^2 \right), \quad (2)$$

где M_A и N_A - соответственно предельный изгибающий момент и продольная сила для балки постоянной высоты того же объема. Этой кривой соответствует ассоциированный закон течения

$$\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t} = \pm \frac{2N^* M_A}{N_A^2} \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t} = \frac{\partial^2 u^*}{\partial x \partial t} + \frac{\partial \omega^*}{\partial x} \frac{\partial^2 \omega^*}{\partial x \partial t}, \quad \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t} = - \frac{\partial^2 \omega^*}{\partial x^2 \partial t}.$$

В последних формулах через u^* обозначено перемещение вдоль оси балки.

Введем следующие безразмерные величины:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{l}, & \alpha_k &= \frac{a_k}{l}, & \gamma &= \frac{h}{h^*}, \\ n &= \frac{2N^* l}{\sigma_A V}, & \mu &= \frac{8Bl^4}{\sigma_A V^2} n^*, & \lambda &= \frac{\sigma_A t_o^2}{9l^2}, \\ m &= \frac{4M^*}{\sigma_A B(R^*)^2}, & \omega &= \frac{4\sigma_B l^3}{3\sigma_A V t_o^2} \omega^*, & u &= l \left(\frac{4\sigma_B l^3}{3\sigma_A V t_o^2} \right)^2 u^*, \\ \varepsilon &= \left(\frac{4\sigma_B l^4}{3\sigma_A V t_o^2} \right)^2 \varepsilon^*, & \varepsilon &= \frac{4\sigma_B l^5}{3\sigma_A V t_o^2} \varepsilon^*, & \tau &= \frac{t}{t_o}, \end{aligned} \quad (4)$$

где t_o - момент снятия нагрузки, a_k - координаты, в которых высота балки изменяется скачком.

Уравнения (1)-(3) в безразмерной форме имеют вид

$$m'' = -6\lambda n \omega'' + 6\gamma \omega' - \mu(\xi, \tau), \quad (5)$$

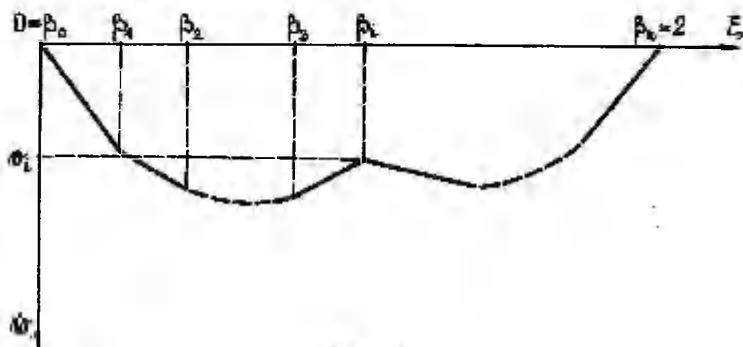
$$m = \pm (\gamma^2 - n^2), \quad (6)$$

$$3\lambda \dot{\varepsilon} = \pm n \dot{\varepsilon}, \quad \dot{\varepsilon} = \dot{u}' + \omega' \dot{\omega}', \quad \dot{\varepsilon} = -\dot{\omega}'', \quad (7)$$

где штрихами обозначены производные по ξ , а точками - по τ .

3. Интегрирование уравнений движения

В ходе нагружения в балке возникают пластические шарниры и пластические зоны. Между ними материал балки остается жестким. Шарниры и границы зон могут двигаться вдоль оси балки. Эпюра скоростей прогиба балки между ее концами и пластическими зонами является кусочно-линейной непрерывной кривой (фиг. 1). Через $B = \{\beta_i: i = 0, \dots, n\}$ обозначена совокупность координат концов балки, границ пластических зон и пластических шарниров.



Фиг. 1

Рассмотрим интегрирование уравнений движения.

На участках, не содержащих пластических зон, скорости прогибов полностью определяются элементами совокупности B и скоростями прогибов ω_i , где ω_i определены на фиг. 1. Скорость прогибов на участке, не являющемся пластической зоной и расположенном между элементами совокупности B β_i и β_{i+1} , определяется формулой

$$\dot{\omega}(\xi, \tau) = \omega_i + \frac{\omega_{i+1} - \omega_i}{\beta_{i+1} - \beta_i} (\xi - \beta_i). \quad (8)$$

Обозначим через $H = \{\eta_i\}$ множество координат всех шарниров, границ пластических зон, скачков высоты, концов балки и точек разрыва величины ω'' (т.е. точек разрыва правой части формулы (5)). Продифференцируем последнее соотношение по τ . Получим

$$\ddot{\omega}(\xi, \tau) = \frac{1}{\beta_{i+1} - \beta_i} \begin{pmatrix} \beta_{i+1} - \xi \\ \xi - \beta_i \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \dot{\omega}_i & \dot{\beta}_i \\ \dot{\omega}_{i+1} & \dot{\beta}_{i+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\omega_{i+1} - \omega_i}{\beta_{i+1} - \beta_i} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Проинтегрируем последние соотношения дважды по ξ . Получим

$$\begin{aligned} \int_{\eta_j}^{\xi} \bar{\omega}(\xi, \tau) d\xi &= I_{i,j}^1(\xi, \tau) = \\ &= \frac{\xi - \eta_j}{2(\beta_{i+1} - \beta_i)} \begin{pmatrix} 2\beta_{i+1} - \eta_j - \xi \\ \eta_j + \xi - 2\beta_i \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \phi_i & \beta_i \\ \phi_{i+1} & \beta_{i+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{\beta_{i+1} - \beta_i} \end{pmatrix}, \\ \int_{\eta_j}^{\xi} d\xi \int_{\eta_j}^{\xi} \bar{\omega}(\xi, \tau) d\xi &= I_{i,j}^2(\xi, \tau) = \\ &= \frac{(\xi - \eta_j)^2}{6(\beta_{i+1} - \beta_i)} \begin{pmatrix} 3\beta_{i+1} - 2\eta_j - \xi \\ 2\eta_j + \xi - 3\beta_i \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \phi_i & \beta_i \\ \phi_{i+1} & \beta_{i+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{\beta_{i+1} - \beta_i} \end{pmatrix}, \\ \xi &\in [\eta_j, \eta_{j+1}] \in [\beta_i, \beta_{i+1}]. \end{aligned} \quad (10)$$

Обозначим символами $m_+(\xi, \tau)$ и $m'_+(\xi, \tau)$ ту часть величин $m(\xi, \tau)$ и $m'(\xi, \tau)$, которая не зависит от давления $p(\xi, \tau)$. Проинтегрируем соотношения (5) дважды по ξ , учитывая соотношения (10). Получим рекуррентные связи

$$\begin{aligned} m_+^1(\xi, \tau) &= m_+^1(\beta_i, \tau) - 6\lambda n \{ \omega'(\xi) - \omega'(\beta_i) - \\ &\quad - \sum_{\substack{\beta_i < \eta_j < \eta_k \\ \beta_i < \eta_j < \eta_k}} [\omega'(\eta_j) - \omega'(\eta_i)] + 6 \{ \sum_{\substack{\beta_i < \eta_j < \eta_k \\ \beta_i < \eta_j < \eta_k}} \gamma(\eta_j) \cdot I_{i,j}^1(\eta_{j+1}, \tau) + \gamma(\eta_k) \cdot I_{i,k}^1(\xi) \} , \\ m_+(\xi, \tau) &= m_+(\beta_i, \tau) - 6\lambda n \{ \omega(\xi) - \omega(\beta_i) - \omega'(\beta_i)(\xi - \beta_i) - \\ &\quad - \sum_{\substack{\beta_i < \eta_j < \eta_k \\ \beta_i < \eta_j < \eta_k}} [\omega(\eta_j) - \omega(\eta_i)](\xi - \beta_i) \} + \\ &\quad + 6 \{ \sum_{\substack{\beta_i < \eta_j < \eta_k \\ \beta_i < \eta_j < \eta_k}} \gamma(\eta_j) \cdot I_{i,j}^2(\eta_{j+1}, \tau) + \gamma(\eta_k) \cdot I_{i,k}^2(\xi) \} . \end{aligned} \quad (11)$$

Для функции $m(\xi, \tau)$ и $m'(\xi, \tau)$ получим формулы

$$\begin{aligned} m'(\xi, \tau) &= m'_+(\xi, \tau) - \int_{\beta_{k_0}}^{\xi} p(\xi, \tau) d\xi, \\ m(\xi, \tau) &= m_+(\xi, \tau) - \int_{\beta_{k_0}}^{\xi} d\xi \int_{\beta_{k_0}}^{\xi} p(\xi, \tau) d\xi. \end{aligned} \quad (12)$$

Расчет начинается с соотношений $m'_+(\beta_{k_n}, \tau) = m'_0(\tau)$ и $m_+(\beta_{k_n}, \tau) = m_0(\tau)$ (символами $m_0(\tau)$ и $m'_0(\tau)$ обозначены значения изгибающего момента и его производной в каком-то фиксированном эле-

менте $\beta_{k_0} \in B$).

В пластических зонах должно выполняться условие

$$m(\xi, \tau) = \pm (\gamma^2(\xi) - n^2(\tau)) = c(\tau). \quad (13)$$

Отсюда следует, что $m' = 0$, $\xi \in [\beta_k, \beta_{k+1}]$. Из уравнения (5) следует тогда

$$\ddot{w} = \frac{\lambda n}{\gamma} \dot{w}^2 + \frac{1}{6\gamma} p(\xi, \tau). \quad (14)$$

Последнее уравнение является уравнением в частных производных гиперболического типа.

4. Система уравнений для определения ускорений

Допустим, что к какому-то моменту времени нам известны прогибы $w(\xi, \tau)$, поле скоростей прогибов $\dot{w}(\xi, \tau)$ и продольная сила n . Обсудим, как определить ускорения прогибов.

В пластических зонах определим ускорения по формуле (14). Из формулы (9) вытекает, что на остальных участках достаточно определить величины β_i и $\dot{\phi}_i$, $i = 0, \dots, n$.

Рассмотрим часть балки, ограниченную справа и слева концами балки или пластическими зонами и не содержащую пластических зон. Допустим, что имеется m элементов β_i , таких, что $\beta_{k_1} < \beta_i < \beta_{k_2}$, где $\beta_{k_1} \in B$ и $\beta_{k_2} \in B$ являются соответственно левой и правой границей рассматриваемой части балки. Допустим еще, что l из них таковы, что $\gamma(\beta_i-) = \gamma(\beta_i+)$ (в общем случае такие шарниры и границы пластических зон являются нестационарными, т.е. $\beta_i \neq 0$). Неизвестными являются m величин $\dot{\phi}_i$, l величин β_i , m_0 и m'_0 . В общей сложности получается $m+l+2$ неизвестных. Систему уравнений для их определения получим из следующих условий:

а) если β_i является координатой пластического шарнира или границей пластической зоны, то должно быть

$$m(\beta_i) = \pm (\gamma_m^2(\beta_i) - n^2),$$

где $\gamma_m(\xi) = \min(\gamma(\xi-), \gamma(\xi+))$;

если β_i является координатой свободного опирания балки, то

$$m(\beta_i) = 0;$$

если у координаты β_i балка заделана и там нет шарнира, то

$$\dot{\phi}_{i+1} = \dot{\phi}_i \quad \text{или} \quad \dot{\phi}_{i-1} = \dot{\phi}_i;$$

б) у каждой границы участка мы имеем по одному условию для $\dot{\phi}_i$;

если β_i является координатой конца балки, то $\sigma_i = 0$; если же у этой координаты находится граница пластической зоны, тогда из уравнения (9) вытекает, что

$$1) \quad \dot{\psi}_i - \beta_i \frac{\sigma_i - \sigma_{i-1}}{\beta_i - \beta_{i-1}} - \dot{\omega}(\beta_i +) = 0$$

в правом конце или

$$2) \quad \dot{\psi}_i - \beta_i \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{\beta_{i+1} - \beta_i} - \dot{\omega}(\beta_i -) = 0$$

в левом конце.

Последние члены в левых частях этих уравнений придется вычислить по формуле (I4).

в) если $\gamma(\beta_i -) = \gamma(\beta_i +)$, тогда $m'(\beta_i) = 0$.

Из условий а) мы получим m уравнений, из условий б) — 2 и из условий в) — l уравнений, в общей сложности $m + l + 2$ уравнения. Эта система уравнений является линейной относительно искомых переменных. При составлении этой системы придется рекуррентно вычислить ее коэффициенты, используя соотношения (II) и (I2).

Эта система является сингулярной в двух случаях:

- *) если балка является статически неопределенной и нет ни пластических зон, ни шарниров;
- **) если существует шарнир β_i такой, что $\gamma(\beta_i -) = \gamma(\beta_i +)$
и $\frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{\beta_{i+1} - \beta_i} = \frac{\sigma_i - \sigma_{i-1}}{\beta_i - \beta_{i-1}}$ (такая ситуация имеет место при возникновении новых и исчезновении старых шарниров).

5. Определение продольной силы

При определении продольной силы исходим из ассоциированного закона течения (7). На жестких участках $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon} = 0$. Из третьего уравнения (7) следует, что $\dot{\omega}' = c(\tau) = \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{\beta_{i+1} - \beta_i}$, где β_i является координатой начала жесткого участка. Применяя теперь вторую из формул (7), получим

$$\dot{\omega}(\beta_{i+1} -) = \dot{\omega}(\beta_i +) - (\dot{\omega}(\beta_{i+1}) - \dot{\omega}(\beta_i)) \cdot \dot{\omega}(\beta_i -). \quad (I5)$$

Исключая из уравнений (7) величины $\dot{\varepsilon}$ и $\dot{\varepsilon}$, находим

$$3\lambda(\dot{\omega}' + \dot{\omega}'\dot{\omega}') = \pm n\dot{\omega}'' \quad (I6)$$

Проинтегрируем последнее соотношение в границах от $\beta_i - \delta$ до $\beta_i + \delta$ и перейдем к пределу $\delta \rightarrow 0$. Учитывая, что величина $\dot{\omega}'\dot{\omega}'$ — ограниченная, получим

$$\dot{u}(\beta_i+) = \dot{u}(\beta_i-) - \text{sign}(m(\beta_i)) \frac{n}{3\lambda} (\dot{\omega}'(\beta_i+) - \dot{\omega}'(\beta_i-)). \quad (17)$$

Интегрируя соотношение (16) в пластической зоне, получим

$$\dot{u}(\beta_{i+1}-) = \dot{u}(\beta_i+) - \int_{\beta_i}^{\beta_{i+1}} \dot{\omega}' \dot{\omega}' d\xi - \frac{n}{3\lambda} |\dot{\omega}'(\beta_{i+1}-) - \dot{\omega}'(\beta_i+)|. \quad (18)$$

Применяя формулы (15), (17) и (18), проходим постепенно весь отрезок $\xi \in [0, 2]$. Учитывая, что $u(0-) = u(2+) = 0$, $\dot{\omega}'(0-) = \dot{\omega}'(2+) = 0$ и обозначая

$$I_+ = \{i : |m(\beta_i+)| < \gamma^2(\beta_i+) - n^2\},$$

$$I_- = \{i : |m(\beta_i+)| = \gamma^2(\beta_i+) - n^2\},$$

получим

$$n = -3\lambda \frac{\sum_{i \in I_+} \dot{\omega}'(\beta_i+) [\dot{\omega}(\beta_{i+1}) - \dot{\omega}(\beta_i)] + \sum_{i \in I_+} \int_{\beta_i}^{\beta_{i+1}} \dot{\omega}' \dot{\omega}' d\xi}{\sum_{i=0}^n \text{sign}(m(\beta_i)) [\dot{\omega}'(\beta_i+) - \dot{\omega}'(\beta_i-)] - \sum_{i \in I_-} |\dot{\omega}'(\beta_{i+1}-) - \dot{\omega}'(\beta_i+)|}. \quad (19)$$

Если значение продольной силы, вычисленное по последней формуле, превосходит ее предельное значение, т.е. если

$n > n_{\max} = \min_{0 \leq \xi \leq 2} \gamma(\xi)$, то придется положить $n = n_{\max}$. В этом случае часть балки (или вся балка) переходит в мембранное состояние (безмоментное пластическое состояние).

6. Ход решения задачи

Рассмотрим сначала вопрос, как вычислить предельную нагрузку. После дискретизации уравнения равновесия (5) при $\omega \equiv 0$ и перехода к новым переменным $m_i^+ = m_i + \gamma^2(\xi_i)$ мы приходим к следующей задаче линейного программирования:

$$\begin{aligned} p_0^m &\rightarrow \max, \\ m_{i-1}^+ - 2m_i^+ + m_{i+1}^+ + p_0^m p_1(\xi_i) \cdot (\Delta\xi)^2 &= 0, \quad i=1, \dots, n-1, \\ m_i^+ - 2\gamma^2(\xi_i) &\leq 0, \quad i=0, \dots, n, \\ m_i^+ &> 0, \quad i=0, \dots, n, \quad p_0^m > 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь принято $p(\xi, \tau) = p_0(\tau) \cdot p_1(\xi)$. Если какой-то конец балки свободно оперт, то прибавляется условие $m_0^+ = \gamma^2(0)$ или/и $m_n^+ = \gamma^2(2)$.

После решения задачи линейного программирования найдем момент начала деформирования, решая уравнение $p_0(\tau) = p_0^m$. Мы можем также определить начальное число и координаты пластических шарниров, анализируя найденные значения m_i^+ : если $m_i^+ = 0$ или $m_i^+ = 2\gamma^2(\xi_i)$, то в соответствующей точке появляется новый пластический шарнир.

Теперь приступим к интегрированию системы уравнений по τ . Рассмотрим шаг интегрирования. Сначала составим систему (или системы) уравнений для определения производных, описание которой (или которых) приведено в пункте 4. Если эта система является сингулярной по причине **), то заменим уравнение $m'(\beta_{i_0}) = 0$ уравнением $\beta_{i_0} = 0$, где β_{i_0} - координата шарнира, где $\omega'(\beta_{i_0}+) = \omega'(\beta_{i_0}-)$.

Решая эту систему относительно производных, мы можем провести шаг интегрирования (или при использовании многоточечных методов промежуточный шаг). Так как в систему уравнений входят значения прогибов шарниров, то придется еще провести шаг интегрирования тривиальной системы уравнений $\omega_i = \sigma_i$, где $\omega_i = \omega(\beta_i)$.

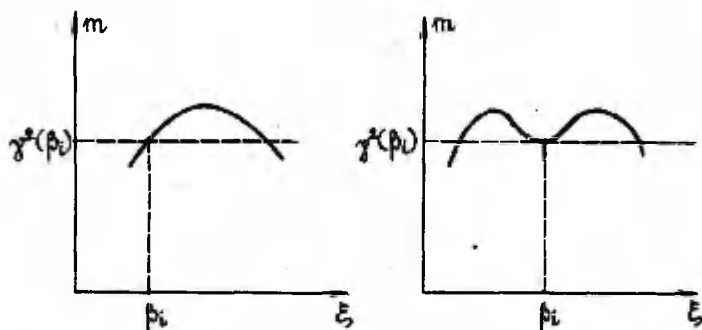
Затем проводим шаг интегрирования пластических зон. Это можно провести методом конечных разностей, но если при решении остальных систем применять, например, метод Рунге-Кутты четвертого порядка, то кажется более естественным применение метода прямых, причем получающиеся при этом системы обыкновенных дифференциальных уравнений интегрируем опять методом Рунге-Кутты. Краевыми условиями являются либо $\omega(\beta_i) = 0$, если β_i является координатой конца балки, либо $\omega(\beta_i) = \omega_i$, если одна из границ участка интегрирования совпадает с координатой β_i .

После каждого шага (или промежуточного шага) определим значение продольной силы n по формуле (18).

Придется также проверить, выполняется ли условие

$$|m(\xi, \tau)| < \gamma^2 - n^2. \quad (21)$$

Значение момента в последнем неравенстве придется вычислить по формулам (11)-(12). Если в какой-то точке это условие не выполнено, то там появляется новый пластический шарнир или старый шарнир переходит в пластическую зону. Последний случай реализуется, если условие (21) нарушается в непосредственной близости шарнира (фиг. 2).



Фиг. 2

Еще надо проверить, выполнено ли требование неотрицательности диссипации энергии

$$\text{sign}(m(\beta_i))(\dot{\omega}'(\beta_i) - \dot{\omega}'(\beta_{i+})) \geq 0 \quad (22)$$

в пластических шарнирах и

$$-m\dot{\omega}'' + n(\dot{\omega}' + \dot{\omega}'\dot{\omega}') \geq 0 \quad (23)$$

в пластических зонах.

Если неравенство (22) где-то нарушается, то соответствующий шарнир исчезает. Если же нарушается неравенство (23), то в соответствующей точке материал балки переходит в жесткое состояние.

Если балка находится в мембранном состоянии, то в безмоментных пластических зонах ε не определяется единственным образом и поэтому неравенство (23) непосредственно неприменимо.

Мембранное состояние реализуется только тогда, когда напряженное состояние сечения балки находится в угловой точке кривой текучести. Это значит, что соотношение (16) не действует и вместо него имеет место неравенство

$$|\varepsilon| \leq \frac{n}{3\lambda} |\kappa| \quad (24)$$

С другой стороны, поскольку в пластических зонах мембранного состояния $m \equiv 0$, то из неравенства (23) находим, что

$$\dot{\varepsilon} > 0 \quad (25)$$

Введем следующие обозначения:

$$I_{\mu}^m = \{i \in I_{\mu} : m(\beta_i) \equiv 0\} \quad - \text{совокупность координат}$$

левых границ пластических зон в мембранном состоянии,

$$\dot{\varepsilon}_i = (\dot{u}' + \dot{\omega}' \dot{\omega}')|_{\xi = \xi_i} \quad (26)$$

$$\Delta_i = \dot{u}(\beta_{i+}) - \dot{u}(\beta_i-) \quad (27)$$

Из неравенства (25) следует, что

$$\varepsilon_i \geq 0, \quad \Delta_i \geq 0, \quad \Delta_i \leq \frac{\eta}{3\lambda} [\dot{\omega}'(\beta_{i+}) - \dot{\omega}'(\beta_i-)] \quad (28)$$

Проинтегрируем формально соотношение (26) и дискретизируем интеграл в левой части. Получим

$$\sum_j c_j \dot{\varepsilon}_j = \dot{u}(\beta_{i+1-}) - \dot{u}(\beta_i-) + \int_{\beta_i}^{\beta_{i+1}} \dot{\omega}' \dot{\omega}' d\xi \quad (29)$$

Применяя формулы (15), (17), (18), (27) и (29), мы находим

$$\begin{aligned} \sum_j c_j \dot{\varepsilon}_j + \sum_{i \in I_p} (\Delta_i + \Delta_{i+1}) - \sum_{i \in I_p} \int_{\beta_i}^{\beta_{i+1}} \dot{\omega}' \dot{\omega}' d\xi - \\ - \sum_{i \in I_p} \dot{\omega}'(\beta_i+) \{ \dot{\omega}_{i+1-} - \dot{\omega}_i + \frac{\eta}{3\lambda} [\text{sign}(m(\beta_{i+1})) - \text{sign}(m(\beta_i))] \} = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Соотношения (25), (28), (24) и (30) могут быть интерпретированы системой ограничений какой-то задачи линейного программирования. Если она окажется противоречивой (а это значит, что $\dot{\varepsilon}$ нельзя определить), то считаем, что балка выходит из мембранного состояния.

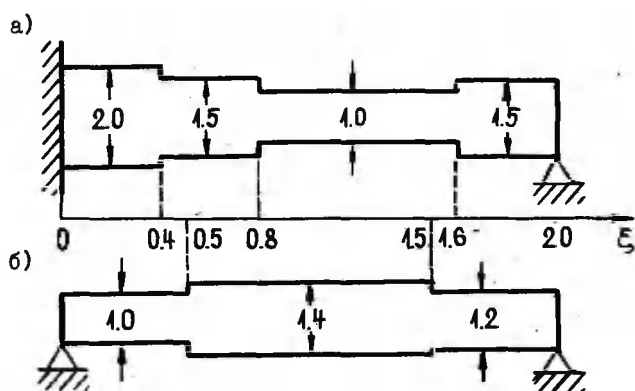
Движение заканчивается, когда все пластические зоны и шарниры исчезают.

7. Примеры

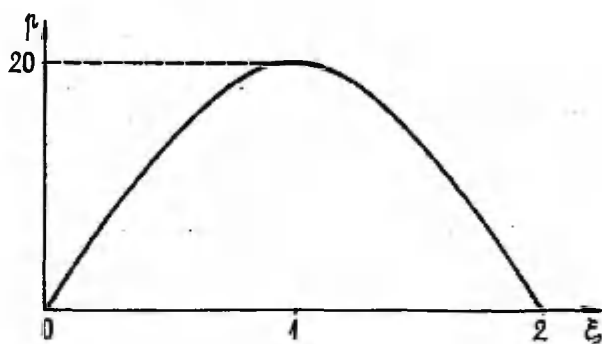
Приведем два численных примера. Конфигурации балок приведены на фиг. 3.

$$\text{Нагрузка } p(\xi, \tau) = 20 \exp\left(\frac{\pi(0.2-\tau)}{\tan(0.2\pi)}\right) \frac{\sin(\pi\tau)}{\sin(0.2\pi)} \cdot \sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)$$

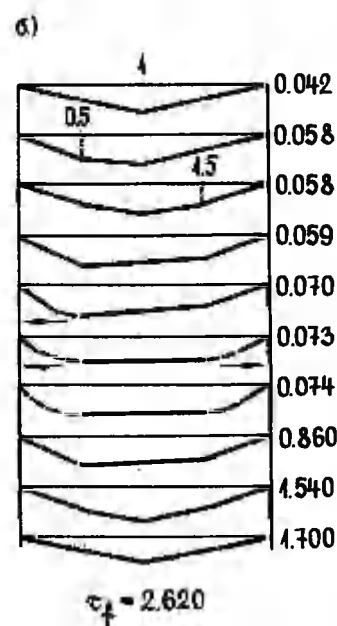
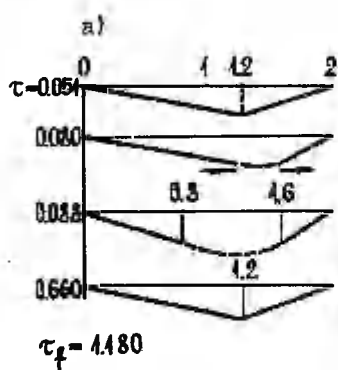
изображена на фиг. 4. Картины появления и исчезновения шарниров и пластических зон показаны на фиг. 5 и 6 (пунктиром изображена пластическая зона). Конечные прогибы показаны на фиг. 6 и 7.



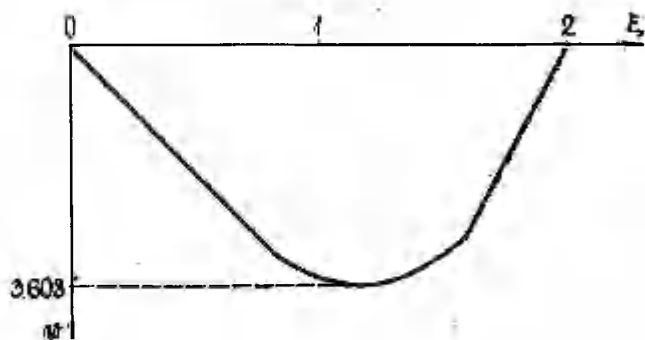
Фиг. 3



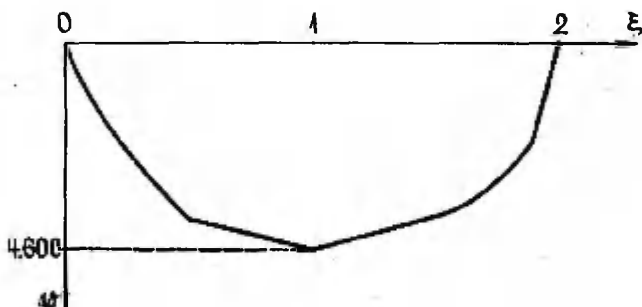
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

ЛИТЕРАТУРА

1. Лепик Д., Оптимальное проектирование динамически нагруженных жёстко-пластических балок с учетом мембранных эффектов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1985, 721, 25-38.
2. Symonds P.S., Mentel T.J., Impulsive loading of plastic beams with axial constraints. J. Mech. and Phys. Solids, 1958, 6, 186-196.

Calculation of dynamically loaded rigid-plastic beams in case of fixed ends

T. Lepikult

Summary

Dynamic response of a rigid-plastic stepped beam, loaded by a pressure over a time interval $0 < t < t_0$, is discussed. The ends of the beam are either simply supported or clamped. The edge constraints prevent axial displacements, so that the membrane action must be taken into account.

System of equations of motion are derived. The algorithms of solution are prescribed and some numerical examples presented.

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН ПРИ УСЛОВИИ ПЛАСТИЧНОСТИ МИЗЕСА

Я.Леллеп, Ю.Маяк

Тартуский государственный университет

Задачи оптимального проектирования осесимметричных жесткопластических пластин заслуживали достаточно много внимания после установления принципа Дракера-Шилда [3]. Однако большинство задач решено в предположении, что материал пластины подчиняется условию пластичности Треска или некоторому другому кусочно-линейному условию пластичности. Круглые и кольцевые пластины, материал которых подчиняется условию пластичности Мизеса, рассматривались в работах [4, 5, 6] в предположении, что при заданных нагрузках напряженное состояние пластин является предельным состоянием.

Ниже рассматривается задача оптимального проектирования кольцевых пластин в геометрически нелинейной постановке. Исследуются идеально трехслойные пластины в случае нелинейной аппроксимации точной поверхности текучести, соответствующей условию пластичности Мизеса. Выводятся необходимые условия оптимальности, которые применяются при численном решении задачи.

I. Постановка задачи и основные уравнения

Пусть кольцевая пластина подвержена действию равномерно распределенной поперечной нагрузки интенсивности P . Внутренний край пластины свободен, внешний - шарнирно закрепленный. Внутренний и внешний радиусы обозначим через a и R соответственно. Пластину считаем идеально трехслойной; k - толщина несущих слоев, H - общая толщина.

Предположим, что интенсивность поперечной нагрузки превышает несущую способность пластины, но радиальное и поперечное перемещения U , W не превышают порядок толщины пластины. В этом случае для определения напряженно-деформированного состояния пластины можно применять уравнения Кармана.

Поставим следующую задачу: требуется найти толщину пластины, при которой объем несущих слоев пластины т.е. функционал

$$J = \int_a^R h r dr, \quad (I.1)$$

достигает минимального значения при данной нагрузке и заданном значении максимального прогиба $W_0 = W(a)$. Величину W_0 будем интерпретировать как максимальный прогиб аналогичной пластины постоянной толщины h_* . Допустим, что переменная толщина пластины ограничена сверху, т.е.

$$h - h_1 \leq 0, \quad (I.2)$$

где h_1 - некоторое заданное число.

Материал пластины считаем идеально жесткопластическим, подчиняющимся условию пластичности Губера-Мизеса. Точную поверхность текучести будем аппроксимировать нелинейной поверхностью

$$n_1^2 - n_1 n_2 + n_2^2 + m_1^2 - m_1 m_2 + m_2^2 - \sigma^2 = 0, \quad (I.3)$$

которая соответствует удовлетворению условия Мизеса в среднем [1]. Здесь и в дальнейшем будем использовать безразмерные переменные

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{r}{R}, & \alpha &= \frac{a}{R}, & \sigma &= \frac{h}{h_*}, & \sigma_1 &= \frac{h_1}{h_*}, \\ n_{1,2} &= \frac{N_{1,2}}{N_*}, & m_{1,2} &= \frac{M_{1,2}}{M_*}, & w &= \frac{N_* W}{M_*}, \\ u &= \frac{R N_*^2 U}{M_*^2}, & \nu &= \frac{P R^2}{2 M_*}, \end{aligned} \quad (I.4)$$

где через N_* и M_* обозначены предельные усилие и момент для пластины с толщиной h_* , т.е. $N_* = 2\sigma_0 h_*$, $M_* = \sigma_0 h_* R$.

Допустим, что имеет место ассоциированный закон деформирования, согласно которому вектор компонентов деформаций является внешней нормалью к поверхности (I.3). Используя обозначения (I.4), запишем закон градиентальности в виде [1] (здесь и в дальнейшем штрих обозначает дифференцирование по φ)

$$\begin{aligned} \omega' + \frac{1}{2} \omega'^2 &= v(2n_1 - n_2), & -\omega' &= v(2m_1 - m_2), \\ \frac{u}{g} &= v(2n_2 - n_1), & -\frac{\omega'}{g} &= v(2m_2 - m_1). \end{aligned} \quad (I.5)$$

Исключая из (I.5) неопределенный неотрицательный множитель v и добавляя к этой системе уравнения равновесия, приходим к следующей системе уравнений [1]:

$$\begin{aligned} n_1' &= \frac{1}{g}(n_2 - n_1), \\ m_1' &= \frac{1}{g}(m_2 - m_1) - n_1 z - \frac{1}{g}(g^2 - \alpha^2), \\ \omega' &= z, \\ z' &= \frac{z}{g} \frac{2m_1 - m_2}{2m_2 - m_1}, \\ u' &= -\frac{1}{2} \frac{z}{z} - \frac{z}{g} \frac{2n_1 - n_2}{2m_2 - m_1}. \end{aligned} \quad (I.6)$$

Здесь величину z (наклон прогиба) можно рассматривать как вспомогательную переменную. Очевидно, из (I.5) следует не учтенное в (I.6) соотношение

$$(2n_2 - n_1)z + (2m_2 - m_1)u = 0, \quad (I.7)$$

которое будем интерпретировать как уравнение для определения неизвестной функции m_2 (или n_2).

При данном виде закрепления пластины имеем следующие краевые условия:

$$n_1(\alpha) = m_1(\alpha) = 0, \quad \omega(\alpha) = \omega_0, \quad m_1(1) = \omega(1) = u(1) = 0, \quad (I.8)$$

где величину ω_0 считаем заданной.

2. Условия оптимальности

Поставленная задача заключается в минимизации функционала (I.1) с учетом дифференциальных связей (I.6) и ограничений (I.2), (I.3), (I.7), а также краевых условий (I.8). Сформулированную задачу рассмотрим как задачу оптимального управления, где n_1 , m_1 , ω , z , u — фазовые переменные, а n_2 , m_2 , v — управления.

Для вывода необходимых условий оптимальности введем сопряженные переменные ψ_1, \dots, ψ_5 , множители Лагранжа φ , η , μ и составим расширенный функционал

$$\begin{aligned}
\bar{J}_* = \int_{\alpha}^1 \{ & \psi_0 + \psi_1 [n_1' - \frac{1}{Q}(n_2 - n_1)] + \psi_2 [m_1' - \frac{1}{Q}(m_2 - m_1)] + \\
& + n_1 z + \frac{P}{Q}(Q^2 - \alpha^2) + \psi_3 (\omega' - z) + \psi_4 (z' - \frac{z}{Q} \frac{2m_2 - m_1}{2m_2 - m_1}) + \\
& + \psi_5 (u' + \frac{1}{2} z^2 + \frac{z}{Q} \frac{2n_2 - n_1}{2m_2 - m_1}) + \varphi(n_1^2 - n_1 n_2 + n_2^2 + \\
& + m_1^2 - m_1 m_2 + m_2^2 - \sigma^2) + \mu [(2n_2 - n_1)z + (2m_2 - m_1)u] + \\
& + \eta (\sigma - \sigma_1 + \theta^2) \} dQ.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Величина θ в (2.1) интерпретируется как управление; оно используется для того, чтобы записать неравенство (1.2) в виде равенства. Что относится к ограничению (1.3), то, следуя [1, 2], допустим, что напряженное состояние пластины соответствует некоторой точке, лежащей на поверхности течучести (не внутри её).

Функционал (2.1) варьируем среди непрерывных фазовых переменных. В то же время управления σ , n_2 , m_2 , θ могут иметь конечное число точек разрыва.

Приравняв к нулю вариацию функционала (2.1) и считая вариации управлений независимыми, приходим к следующим условиям:

$$\begin{aligned}
\eta \cdot \theta &= 0, \\
Q - 2\varphi\sigma + \eta &= 0, \\
-\frac{\psi_1}{Q} + \psi_5 \frac{z}{Q(m_1 - 2m_2)} + \varphi(2n_2 - n_1) + 2\mu z &= 0, \\
-\frac{\psi_2}{Q} + \frac{3m_2 \psi_4 z}{Q(2m_2 - m_1)^2} - \frac{2\psi_5 z(2n_1 - n_2)}{Q(2m_2 - m_1)^2} + \varphi(2m_2 - m_1) + \\
&+ 2\mu u = 0.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Из-за независимости вариации фазовых переменных в выражении вариации функционала (2.1) получим сопряженную систему в виде

$$\begin{aligned}
\psi_1' &= \frac{\psi_1}{Q} + \psi_2 \bar{z} + \frac{2\psi_2 \bar{z}}{Q(2m_2 - m_1)} - \varphi(2n_1 - n_2) - \mu \bar{z} ; \\
\psi_2' &= \frac{\psi_2}{Q} + \frac{\bar{z}}{Q} \cdot \frac{\psi_2(2n_1 - n_2) + 3m_2 \psi_1}{(2m_2 - m_1)^2} + \varphi(2m_1 - m_2) - \mu \mu ; \\
\psi_3' &= 0 ; \\
\psi_4' &= n_1 \psi_2 + \frac{\psi_2(2n_1 - n_2) - \psi_1(2m_2 - m_1)}{Q(2m_2 - m_1)} + \mu(2n_2 - n_1) + \psi_2 \bar{z} - \psi_3 ; \\
\psi_5' &= \mu(2m_2 - m_1) .
\end{aligned} \quad (2.3)$$

В соответствии с краевыми условиями (1.8) сопряженные переменные должны удовлетворять следующим условиям трансверсальности:

$$\psi_4(\alpha) = \psi_5(\alpha) = \psi_1(1) = \psi_4(1) = 0 . \quad (2.4)$$

Рассмотрим систему (2.2) более подробно. Согласно первому уравнению возможны случаи, когда

$$\eta = 0 , \quad 0 \neq 0 \quad (2.5)$$

и

$$\eta \neq 0 , \quad \theta = 0 . \quad (2.6)$$

В части пластины, где имеет место (2.5), т.е. $\varphi < \varphi_1$, согласно второму уравнению в системе (2.2) имеем

$$\varphi = \frac{Q}{2\sigma} . \quad (2.7)$$

Если $\varphi = \varphi_1$, т.е. имеют место соотношения (2.6), то из (2.2) определяем

$$\eta = 2\psi\psi_1 - Q . \quad (2.8)$$

Последние уравнения в системе (2.2) дадут

$$\mu = -\frac{Q}{2\bar{z}}(n_1 - 2n_2) + \frac{\psi_1}{2Q\bar{z}} + \frac{\psi_2}{2Q(2m_2 - m_1)} \quad (2.9)$$

и после подстановки (2.9) в (2.2)

$$\varphi = \frac{\psi_2}{Q} \frac{3\psi_1 \bar{z} m_1}{Q(2m_2 - m_1)^2} + \frac{2\psi_2 \bar{z}(2n_1 - n_2)}{Q(2m_2 - m_1)^2} - \frac{\mu(\psi_1 + \frac{\psi_2}{\bar{z}} + \frac{\psi_2}{2m_2 - m_1})}{2m_1 - m_2 + \frac{\mu}{\bar{z}}(n_1 - 2n_2)} \quad (2.10)$$

Таким образом, в области, где $\varphi < \varphi_1$, с учетом (2.7) и (2.10) выражаем безразмерную толщину в виде

$$\sigma = \frac{\frac{1}{2} \varphi^2 (2m_1 - m_2 + \frac{u}{z} (n_1 - 2n_2))}{\psi_2 - \psi_4 \frac{3m_1 z}{(2m_2 - m_1)^2} + 2\psi_3 z \frac{2n_1 - n_2}{(2m_2 - m_1)^2} - u \left(\frac{\psi_1}{z} + \frac{\psi_5}{2m_2 - m_1} \right)} \quad (2.11)$$

Соотношение (2.11) рассмотрим совместно с уравнениями (1.3) и (1.7); полученную систему интерпретируем в каждом узле как систему для определения неизвестных m_2 , n_2 и σ . Оставшиеся переменные (фазовые переменные n_1 , m_1 , ω , z , u , а также сопряженные переменные ψ_1, \dots, ψ_5) определяем как решение краевой задачи с уравнениями (1.6), (2.3) и краевыми условиями (1.8), (2.4).

В области, где $\sigma = \sigma_1$, уравнения (1.3) после подстановки $\sigma = \sigma_1$ позволяют найти в каждой точке управления m_2 и n_2 через значения фазовых координат. Дальнейшее решение задачи принципиально не отличается от решения, разработанного для предыдущего случая. В то же время из (2.8) можно найти множитель Лагранжа η .

3. Численное решение задачи; обсуждение результатов

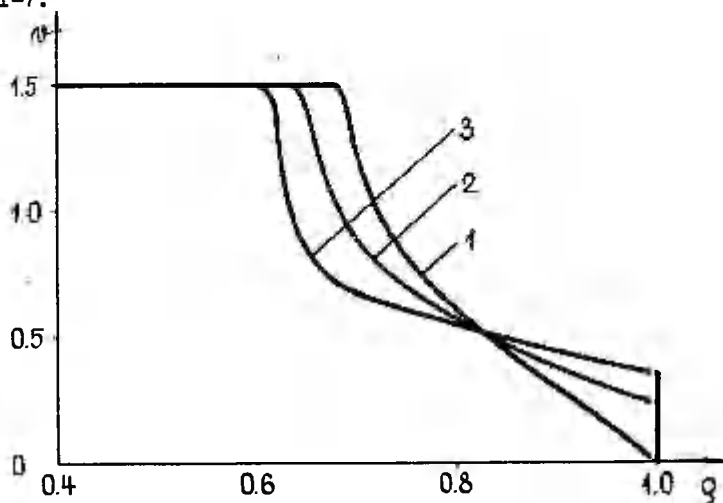
Краевая задача с уравнениями (1.6) и (2.3) решается численно на ЭВМ ЕС 1060 методом сопряженных уравнений. Этот метод оказался эффективным при решении задач оптимального проектирования геометрически нелинейных жесткопластических цилиндрических оболочек [2], а также при определении больших перемещений кольцевых пластин [1]. Метод сопряженных уравнений заключается в введении вспомогательных переменных, для которых формулируется ряд задач Коши на каждом шаге итерации. С помощью значений вспомогательных переменных вычисляются поправки краевых значений переменных основной системы [1, 2].

Вычисления проводим в следующем порядке. Сначала рассмотрим пластину с постоянной толщиной несущих слоев. Определяем несущую способность пластины постоянной толщины и путем последовательного увеличения поперечной нагрузки определим напряженно-деформированное состояние пластины при умеренно больших перемещениях. В частности, определяется значение прогиба ω_0 на свободном контуре при заданной нагрузке. Затем решается задача оптимизации при фиксированных значениях интенсивности поперечной нагрузки p и максимального прогиба ω_0 .

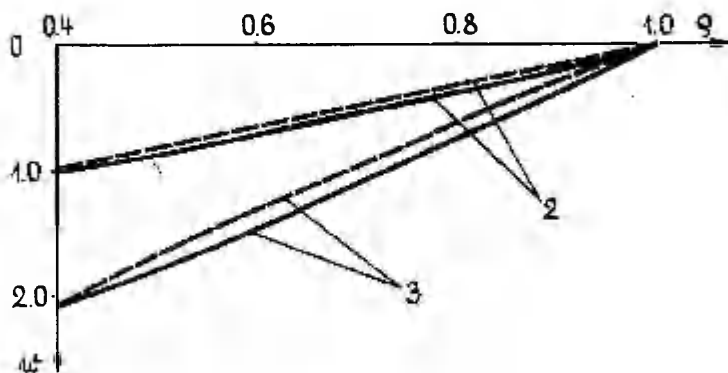
Эффективность найденного проекта оценивается коэффициентом $\epsilon = V_0/V_*$, где V_0 обозначает объем несущих слоев для

оптимального проекта, а V_* - для сравниваемой пластины постоянной толщины. Обе пластины имеют одинаковый максимальный прогиб при одинаковом значении интенсивности поперечной нагрузки.

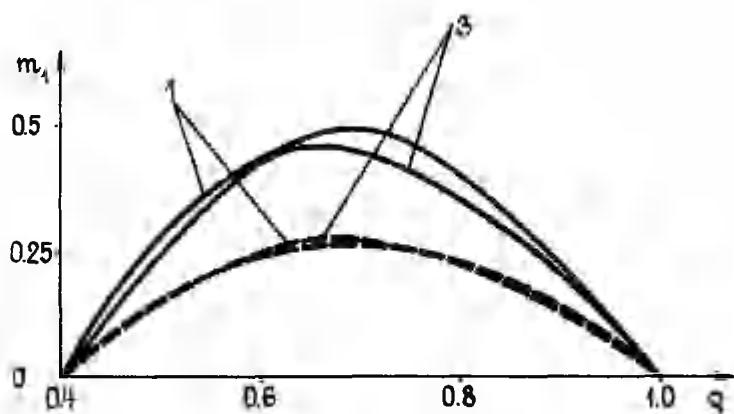
Результаты расчетов представлены в табл. 1, 2 и на фиг. 1-7.



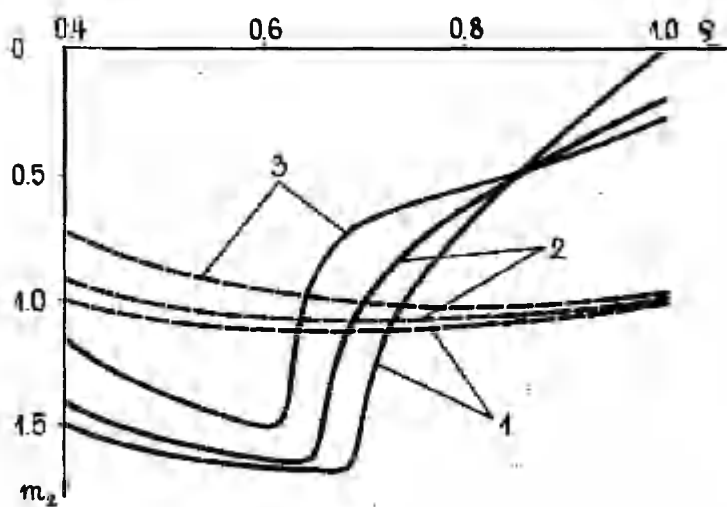
Фиг. 1.



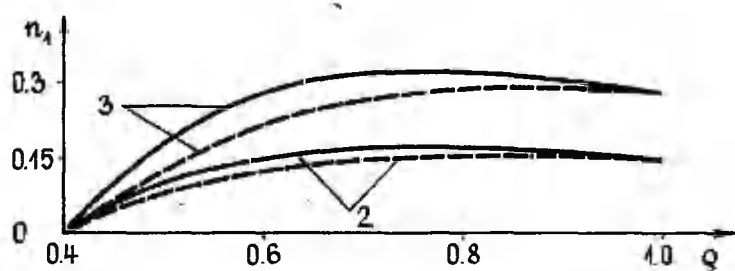
Фиг. 2.



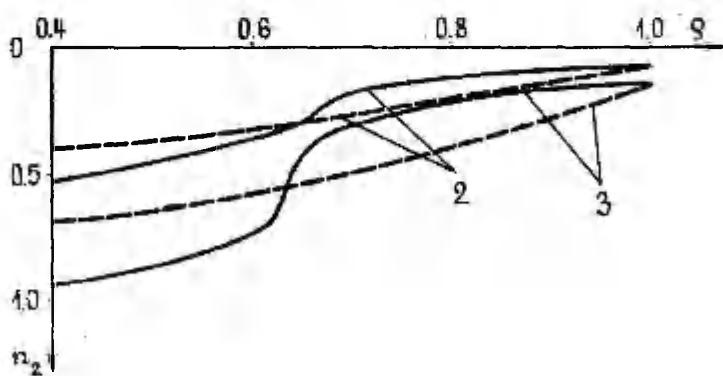
Фиг. 3.



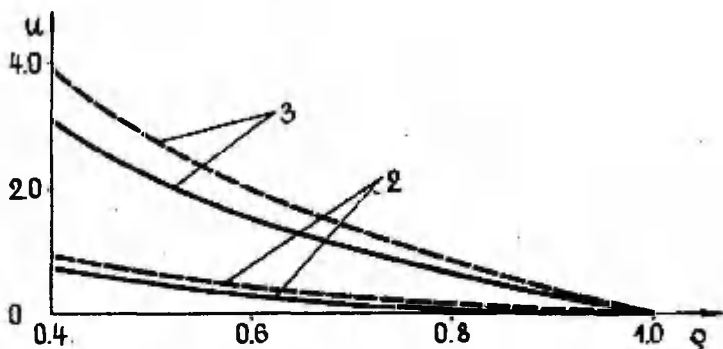
Фиг. 4.



Фиг. 5.



Фиг. 6.



Фиг. 7.

В табл. 1, 2 указаны значения коэффициента экономии e и максимального прогиба ω_0 при некоторых значениях интенсивности поперечной нагрузки. Табл. 1 соответствует случаю $\alpha = 0,1$, $\phi_1 = 1,2$; табл. 2 - случаю $\alpha = 0,4$; $\phi_1 = 1,5$.

На фиг. 1 представлена оптимальная толщина несущих слоев пластины при некоторых значениях интенсивности поперечной нагрузки. Кривые на фиг. 1-7 имеют единую нумерацию; соответствующие им поперечные нагрузки указаны в табл. 2.

На фиг. 2-7 представлены графики изгибающих моментов, радиального и окружного усилий, прогиба и радиального перемещения. Сплошными линиями приведены графики для оптимального проекта, а штриховые линии соответствуют сравниваемой пластине постоянной толщины.

Табл. 1

№	1	2	3
μ	3,135	3,420	4,300
ω_0	0	0,982	2,041
e	0,862	0,873	0,884

Табл. 2

№	1	2	3
μ	2,992	3,300	4,200
ω_0	0	0,982	2,054
e	0,855	0,843	0,810

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Леллеп Я., Маяк Ю., Большие прогибы жестко-пластических кольцевых пластин. Уч.зап.Тартуск.ун-та,1987,772, 33-43.
2. Леллеп Я., Маяк Ю., Оптимизация жесткопластических геометрически нелинейных цилиндрических оболочек. Уч.зап. Тартуск. ун-та, 1988, 799, 27-36.
3. Drucker D.C., Shield R.T., Design for minimum weight. Act. IX Congr. Int. de Méc. Appliq. T.5. Bruxelles, 1957, 212-222.
4. Eason G., The minimum weight design of circular sandwich plates. Z. angew. Math. und Phys., 1960, 11, № 5, 368-375.
5. Freiburger W., Tekinalp B., Minimum weight design of circular plates. J.Mech. and Phys. Solids, 1956, 4, № 4, 294-299.
6. Reiss R., Megarefs G.J., Minimal design of sandwich axisymmetric plates obeying Mises criterion. Int.J. Solids and Struct., 1971, 7, № 6, 603-623.

Optimal design of rigid-plastic annular
plates in the case of Von Mises yield condition
J.Lellep, J.Majak

Summary

The problems of optimal design of annular plates are studied with the aid of the variational methods of the optimal control theory. With variable face sheet thickness of a sandwich plate and the volume of the face sheets the property to be minimized the minimal design is established under the condition that the maximal deflection of the design coincides with the maximal deflection of an associated plate with constant thickness.

Material of the plate is assumed to be rigid-plastic and obeys Von Mises yield condition. Geometrical non-linearity is taken into account.

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПЛАСТИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, ПОДКРЕПЛЕННЫХ ОСЕВЫМИ РЕБРАМИ

Я.Леллеп, Х.Хейн

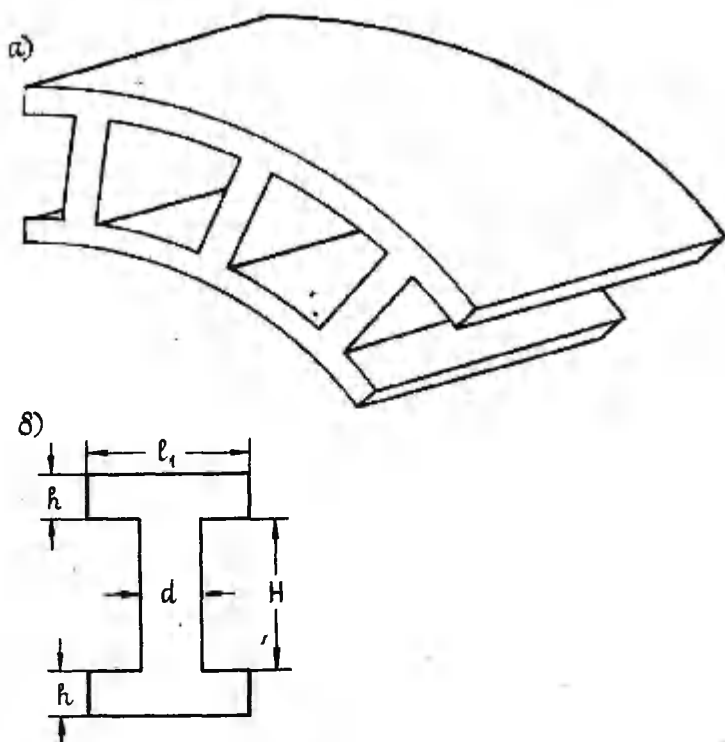
Тартуский государственный университет

Задачи оптимального проектирования неупругих тонких оболочек заслуживали в последнее время достаточно много внимания. Однако сравнительно мало внимания уделено подкрепленным оболочкам. Но ребра жесткости являются эффективным средством при повышении прочностных и других характеристик оболочечных конструкций. Задачи оптимизации жестко-пластических цилиндрических оболочек, подкрепленных окружными ребрами, рассматривались в работах [3, 4, 9].

Ниже исследуются круговые цилиндрические оболочки с подкрепляющими ребрами, расположенными в осевом направлении. Решается задача минимизации веса ребер при условии, что прогибы оболочек переменной толщины и постоянной толщины совпадают. Материал стенки оболочки и ребер — жестко-пластический, подчиняющийся условию пластичности Треска.

§1. Формулировка задачи и основные предположения

Рассмотрим шарнирно закрепленную по обоим концам цилиндрическую оболочку радиуса A длины $2l$, подверженную действию равномерно распределенного внутреннего давления интенсивности P и осевого растяжения N . Допустим, что структура оболочки определяется следующим образом: она состоит из двух слоев толщины h , которые прикреплены между собой на равных расстояниях друг от друга продольными подкрепляющими ребрами высотой H и шириной d (фиг. 1). Предположим, что ребра раскложены на столь малых расстояниях друг от друга, что при исследовании напряженно-деформированного состояния оболочки можно пренебречь локальными деформациями вблизи ребер и ограничиться рассмотрением деформирования образующих цилиндра. Частота расположения ребер характеризуется величиной $\omega_1 = d/l_1$, где l_1 — расстояние между ребрами.



Фиг. 1.

Пусть материалы обшивки и ребер — жесткопластические, подчиняющиеся условию пластичности Треска — Сен — Венана. Ограничимся случаем, когда обшивка и ребра изготовлены из одного и того же материала с пределом текучести σ_0 .

Начало координатной оси поместим в центре некоторой образующей цилиндра и в дальнейшем из-за симметрии рассмотрим лишь правую часть оболочки ($0 \leq x \leq \ell$). Допустим, что геометрические характеристики h , d , A , ℓ , ℓ_1 являются постоянными, но высота ребра — функция $H = H(x)$.

Требуется найти проект оболочки, при котором масса ребер, т.е. функционал

$$J = \int_0^{\ell} H(x) dx, \quad (I.1)$$

достигает минимального значения, а прогибы оболочек, соот-

ветствующие переменной высоте $H(x)$ и постоянной высоте H_0 , совпадают. Здесь предполагается, что интенсивность распределенной нагрузки превышает несущую способность оболочки, а перемещения умеренно большие (прогиб не превышает порядок толщины оболочки).

Естественно предположить, что $N \geq N_0$ (где $N_0 = 2\delta_0 h$, $M_0 = \delta_0 h^2$), так как в противном случае оболочка сопротивляется заданной нагрузке без ребер жесткости и задача минимизации массы ребер теряет смысл. С учетом того, что $H \leq H_0$, получим ограничение в виде $N \leq N_0 + \omega_1 \delta_0 H_0$. Таким образом,

$$1 \leq \frac{N}{N_0} \leq 1 + \frac{\omega_1}{2} \frac{H_0}{h}. \quad (1.2)$$

§ 2. Аппроксимация поверхности текучести

Поверхности текучести для подкрепленных круговых цилиндрических оболочек, материал которых подчиняется условию пластичности Треска - Сен-Венана, построены в работах [1, 6, 7, 8]. В случае, когда оболочка подкреплена в осевом направлении и ребра расположены между слоями оболочки, образуется поверхность текучести, состоящая из 18-ти кусков.

Уравнения разных частей поверхности текучести можно представить в виде

$$n_2 = \pm 1, \quad (2.1)$$

$$\pm (n \pm n^*) \mp (n_2 \mp 1) \pm m_1 = 1, \quad (2.2)$$

$$\pm (n \pm n^*) \mp m_1 \mp (n_2 \mp 1) = 1, \quad (2.3)$$

$$\pm (n \pm n^*) \mp (n_2 \mp 1) = 1, \quad (2.4)$$

$$m_1 \pm m^* - (n_2 \mp 1) \mp \frac{\alpha_s}{\omega_1} \left[\pm (n_2 \mp 1) + \frac{1}{2} \mp n \right]^2 \mp \frac{1}{2} = 0, \quad (2.5)$$

$$m_1 \mp m^* + (n_2 \mp 1) \pm \frac{\alpha_s}{\omega_1} \left[\pm (n_2 \mp 1) + \frac{1}{2} \mp n \right]^2 \pm \frac{1}{2} = 0, \quad (2.6)$$

$$m_1 \mp m^* \pm \frac{\alpha_s}{\omega_1} n^2 = 0, \quad (2.7)$$

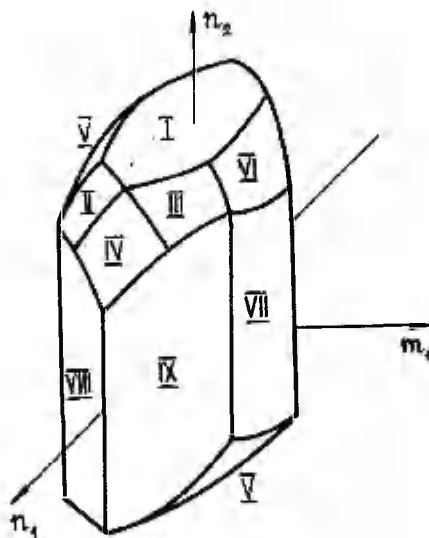
$$m_1 \pm (n - n^*) = 0, \quad (2.8)$$

$$m_1 \mp (n + n^*) = 0. \quad (2.9)$$

В уравнениях (2.1) - (2.9) и в дальнейшем используются следующие безразмерные величины:

$$\begin{aligned}
 n_1 &= \frac{N}{N_0}, & n_2 &= \frac{N_\varphi}{N_0}, & m_1 &= \frac{M}{\delta_0 (R^2 + R H)}, & \varphi &= \frac{H}{R}, \\
 \alpha_s &= \frac{R^2}{R^2 + R H}, & n^* &= 1 + \omega_s \frac{H}{2R}, & m^* &= 1 + \frac{\alpha_s \omega_s}{4} \frac{H^2}{R^2}, & \xi &= \frac{x}{l}, \\
 \omega &= \frac{N_0 l^2}{A M_0}, & \omega_s &= \frac{N_0 W}{2 M_0}, & u &= \frac{N_0^2 l U}{4 M_0^2}, & \nu &= \frac{A P}{N_0}, & m &= \frac{M}{M_0},
 \end{aligned} \quad (2.10)$$

где N , N_φ - усилия, M - изгибающий момент, U , W - перемещения.



Фиг.2.

Точная поверхность текучести, соответствующая уравнениям (2.1) - (2.10), имеет довольно сложную форму (фиг. 2). Одна возможная аппроксимация этой поверхности была представлена в работе [6]. В данной статье выбирается в качестве аппроксимации данной поверхности описанный многогранник, который получается при удлинении граней (2.8) и (2.9) до пересечения с гранью (2.1).

Предположим, что напряженное состояние оболочки соответствует грани

$$n_2 = 1 \quad (2.11)$$

аппроксимированной поверхности текучести. Учитывая то, что $n > 0$, получим следующее ограничение для изгибающего момента:

$$|m| \leq (1 + \sigma)(n - 1 - \frac{\omega_1}{2}\sigma) \quad (2.12)$$

Допустим в дальнейшем, что при внутреннем давлении $p > 0$ имеем $m \leq 0$ (ограничимся случаем т.н. «коротких» оболочек). Изгибающий момент, усилия и прогиб удовлетворяют уравнению равновесия (штрих обозначает дифференцирование по ξ)

$$m'' - 2nw'' - \omega(p - n_2) = 0, \quad (2.13)$$

а также геометрическим соотношениям

$$E_1 = \frac{4M_0^2}{l^2 N_0^2} (u' + \frac{1}{2}w'^2), \quad E_2 = \frac{2M_0}{AN_0} w', \quad \chi = \frac{2M_0}{N_0 l^2} w'' \quad (2.14)$$

§ 3. Большие прогибы оболочки постоянной толщины

Рассмотрим теперь оболочку, у которой толщина слоев и размеры поперечного сечения ребер постоянные. Пусть $\sigma_0 = N_0/k$.

Решение задачи определения напряженно-деформированного состояния подкрепленной оболочки при данной аппроксимации поверхности текучести является аналогичным решению этой задачи в случае идеализированной оболочки и условия пластичности Треска - Сен-Венана [2, 10]. Повтому не будем останавливаться на подробностях решения, а ограничимся представлением окончательных результатов:

$$m = \begin{cases} m_0, & \xi \in (0, E_1), \\ m_0 + \frac{\omega}{2}(p-1)(E_1 - \xi)^2, & \xi \in (E_1, 1), \end{cases} \quad (3.1)$$

где для краткости записи введено обозначение

$$m_0(n) = (1 + \sigma_0)(n - 1 - \frac{\omega_1}{2}\sigma_0) \quad (3.2)$$

Распределение прогиба выражается формулой

$$w = \begin{cases} \frac{\omega}{4n}(1-p)(\xi^2 + E_1(E_1 - 2)), & \xi \in (0, E_1), \\ \frac{\omega}{2n}(1-p)E_1(E_1 - \xi), & \xi \in (E_1, 1), \end{cases} \quad (3.3)$$

где

$$E_1 = 1 - \sqrt{\frac{2(1+\sigma_0)}{\omega(p-1)}(1-n - \frac{\omega_1}{2}\sigma_0)} \quad (3.4)$$

§ 4. Проект минимального веса

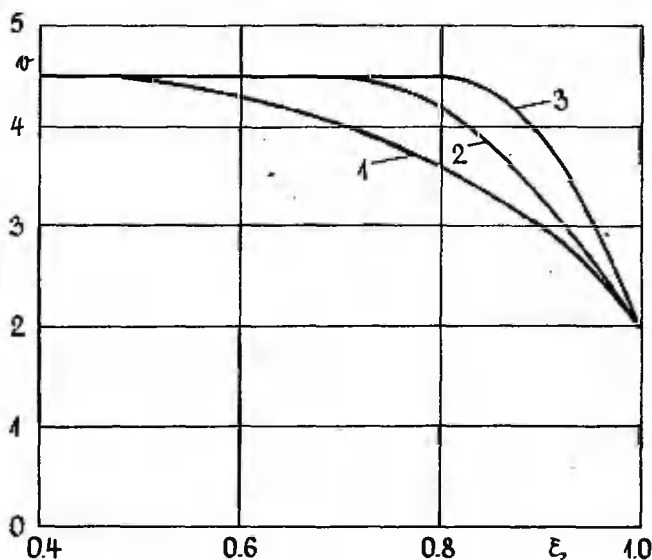
Рассмотрим теперь случай, когда ребра имеют переменную высоту, т.е. $\sigma = \sigma(\xi)$, и определим функцию σ таким образом, чтобы функционал (I.I) достигал минимального значения. Согласно постановке задачи требуется, чтобы прогиб рассматриваемой оболочки совпадал с прогибом оболочки с постоянными размерами (3.3). Подставляя (2.II), (3.3) в уравнения равновесия (2.I3), приходим к уравнению

$$\pi'' = \begin{cases} 0, & \xi \in (0, \xi_1), \\ \omega(r-1), & \xi \in (\xi_1, 1), \end{cases} \quad (4.I)$$

правая часть которого не зависит от неизвестной функции $\sigma(\xi)$.

Для вывода условий оптимальности следовало бы составить расширенный функционал с учетом ограничений (2.I2), (4.I). Однако из-за простой формы функционала (I.I) и дифференциальных ограничений (4.I) можно непосредственно увидеть, что на оптимум претендует решение, при котором в (2.I2) реализуется знак равенства [2, 5]. Поэтому опускаем подробности, связанные с варьированием расширенного функционала, и представим лишь окончательные результаты.

Покажем, что оптимальная высота ребер соответствует



Фиг. 3.

случаю, когда

$$\sigma = \sigma_0, \quad \xi \in (0, \xi_1) \quad (4.2)$$

и $\sigma = \sigma(\xi)$ при $\xi \in (\xi_1, 1)$. Согласно вышесказанному из (2.12) находим

$$\sigma = \frac{1}{\omega_1}(n-1) - \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{n-1}{\omega_1} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\omega}{\omega_1}(n-1-m)} \quad (4.3)$$

Из (4.3) получим с учетом (3.1) и (3.4) оптимальную высоту ребер (фиг. 3)

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_0, & \xi \in (0, \xi_1), \\ \frac{1}{\omega_1}(n-1) - \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{n-1}{\omega_1}\right)^2 - \frac{\omega}{\omega_1}(n-1)(\xi-1)(1+\xi-2\xi_1)}, & \xi \in (\xi_1, 1). \end{cases} \quad (4.4)$$

При выводе формулы (4.4) было использовано распределение момента (3.1), соответствующее подкрепленной оболочке с ребрами постоянной высоты. Открытым остался вопрос, имеют ли это соотношение место в оптимальном случае. Ответ на этот вопрос положительный, так как изгибающий момент в виде (3.1) удовлетворяет уравнению равновесия (4.1) при тех же краевых условиях.

§ 5. Обсуждение результатов

Чтобы оценить эффективность найденного проекта, введем коэффициент экономии

$$e = \frac{1}{\sigma_0} \int_0^1 \sigma(\xi) d\xi, \quad (5.1)$$

где $\sigma(\xi)$ определяется в форме (4.4). После подстановки (4.4) в (5.1) и некоторых выкладок приходим к формуле

$$e = \xi_1 + \frac{1}{\sigma_0}(1-\xi_1) \left[\frac{1}{\omega_1}(n-1) - \frac{1}{2} \right] + \frac{1}{\sigma_0} \int_{\xi_1}^1 \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{n-1}{\omega_1}\right)^2 - \frac{\omega}{\omega_1}(n-1)(\xi-1)(1+\xi-2\xi_1)} d\xi. \quad (5.2)$$

Интеграл в (5.2) следует найти численно. Результаты счета представлены в табл. 1 и 2 при некоторых значениях интенсивности нагрузки. Здесь $\omega = 4$; $\sigma_0 = 4,5$; $\omega_1 = 0,1$. Табл. 1 соответствует осевому растяжению, когда $n = 1,1$; табл. 2 - случаю, если $n = 1,2$.

До сих пор остался открытым вопрос о применимости проекта (4.4) в конечном интервале интенсивностей нагрузок (с ма-

тематической точки зрения этот проект оптимален при заданных значениях нагрузок). Чтобы ответить на этот вопрос, построим оптимальный проект для некоторых значений поперечной нагрузки и осевого растяжения ($p = p_1$, $n = n_1$) и исследуем напряженно-деформированное состояние данной оболочки при $p < p_1$ и $n < n_1$.

Допустим, что задан проект оболочки при $n = n_1$, $p = p_1$. Согласно (4.4) имеем

$$\sigma_1 = \begin{cases} \sigma_0, \\ \frac{1}{\omega_1}(n_1-1) - \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{n_1-1}{\omega_1}\right)^2 - \frac{\omega}{\omega_1}(p_1-1)(\xi-1)(1+\xi-2\xi_1^*)}, \end{cases} \quad (5.3)$$

$\xi \in (\xi_1^*, 1)$.

Определим напряженно-деформированное состояние оболочки с ребрами формы (5.3), где $\sigma_1 = \sigma_1(\xi)$ и

$$\xi_1^* = 1 - \sqrt{\frac{2m_0(n_1)}{\omega(p_1-1)}}. \quad (5.4)$$

Покажем, что при всех $p \in [p_0, p_1]$; $n \in [1, n_1]$ выполняется неравенство

$$m \geq (1 + \sigma_1)(n-1 - \frac{\omega}{2}\xi_1^*). \quad (5.5)$$

Заметим, что $\xi_1^* \geq \xi_1$. Поэтому неравенство (5.5) следует проверять в областях $(0, \xi_1)$; (ξ_1, ξ_1^*) и $(\xi_1^*, 1)$.

Прямая проверка путем интегрирования уравнения (4.1) и удовлетворения краевым условиям показывает, что (5.5) выполняется при всех $p \in [p_0, p_1]$; $n \in [1, n_1]$. В табл. 3 указаны значения изгибающего момента при некоторых значениях поперечной нагрузки. Здесь $n = 1, 2$; $\omega = 4$; $\omega_1 = 0, 1$; $p_1 = 7, 0$; $\sigma_0 = 4, 5$. Проект оболочки найден для $p = 7, 0$ и $n = 1, 2$. При фиксированном значении осевого растяжения правая часть неравенства (5.5) представляет изгибающий момент при $p = p_1$. Из табл. 3 видно, что требование (5.5) удовлетворено в каждой точке оболочки.

Табл. I

p	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0
	0.414	0.521	0.585	0.629	0.662	0.687	0.707	0.724	0.738
	0.910	0.927	0.936	0.943	0.948	0.952	0.955	0.958	0.960

Табл. 2

	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0
	0.738	0.788	0.815	0.834	0.849	0.860	0.869	0.876	0.883
	0.991	0.992	0.993	0.994	0.995	0.995	0.995	0.996	0.996

Табл. 3

	0.471	0.588	0.688	0.706	0.765	0.824	0.882	0.941
2.0	-0.681	-0.627	-0.579	-0.517	-0.441	-0.352	-0.248	-0.131
4.0	-0.688	-0.688	-0.688	-0.676	-0.624	-0.530	-0.395	-0.218
5.0	-0.688	-0.688	-0.688	-0.688	-0.661	-0.579	-0.441	-0.248
6.0	-0.688	-0.688	-0.688	-0.688	-0.680	-0.614	-0.479	-0.274
7.0	-0.688	-0.688	-0.688	-0.688	-0.688	-0.640	-0.510	-0.296

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Байрон А., Савчук А., Пластический расчет цилиндрических оболочек, подкрепленных ребрами жесткости. Прикл.мех. Тр. Америк. об-ва инж.-мех. Сер.Е., 1967, № I, 43-48.
2. Деллеп Я., К оптимальному проектированию жестко-пластических цилиндрических оболочек с учетом больших прогибов. Уч.зап. Тартуск. ун-та, 1983, 659, 52-58.
3. Деллеп Я., Оптимальное расположение дополнительных опор к геометрически нелинейной пластической цилиндрической оболочке. Прикл. мех., 1985, № I, 60-66.
4. Деллеп Я., Ханнус С., Оптимизация расположения дополнительных опор к пластической цилиндрической оболочке. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1988, 799, 21-26.
5. Деллеп Я., Хейн Х., Оптимальное проектирование армированных пластических цилиндрических оболочек. Уч.зап. Тартуск. ун-та, 1987, 772, 96-109.
6. Немировский Ю.В., О проектировании замкнутых цилиндрических оболочек, нагруженных гидростатическим давлением. Изв. вузов. Машиностр., 1969, № 12, 27-34.
7. Немировский Ю.В., Работнов Ю.Н., Предельное равновесие подкрепленных цилиндрических оболочек. Изв. АН СССР. Мех.и машиностр., 1963, № 3, 83-94.

8. Biron A., Limit analysis of cylindrical shells with longitudinal rib reinforcements. Int. J. Solids and Struct., 1970, 6, № 7, 893-908.
9. Cinquini C., Kouam M., Optimal plastic design of stiffened shells. Int. J. Solids and Struct., 1983, 19, № 9, 773-783.
10. Duszek M., Plastic analysis of cylindrical shells subjected to large deflections. Arch. Mech. Stosów., 1966, 18, № 5, 599-614.

Optimal design of plastic cylindrical shells with
longitudinal rib-reinforcement

J.Lellep, H.Hein

Summary

The problem of minimum weight design is studied in the case of circular cylindrical shells strengthened with the aid of longitudinal ribs. Materials of the face-sheets as well as ribs are assumed to be rigid-plastic obeying the Tresca yield criterion. The optimization problem is solved under the condition that the deflections of the optimal shell coincide with the deflections of the corresponding shell of constant thickness. The deformations of the shell are assumed to be small, but displacements are of the order of the shell wall thickness.

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК КУСОЧНО-ПОСТОЯННОЙ ТОЛЩИНЫ

Я.Леллеп, С.Ханнус

Тартуский государственный университет

Существует довольно богатая литература по оптимальному проектированию жесткопластических осесимметричных пластин в предположении, что толщина пластин является кусочно-постоянной [8]. Гораздо меньше обращено внимания к задачам минимального веса осесимметричных оболочек кусочно-постоянной толщины. В работе [6] рассматриваются цилиндрические оболочки с ребрами жесткости в геометрически линейной постановке с использованием условия пластичности Треска, а в [7] разработан общий метод параметрической оптимизации оболочек с учетом геометрической нелинейности. Ниже представляется методика определения оптимального проекта для цилиндрической оболочки кусочно-постоянной толщины с учетом умеренно больших прогибов. Материал оболочки подчиняется условию Мизеса.

1. Формулировка задачи. Основные уравнения и гипотезы

Рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку длины $2l$ и радиуса A . Допустим, что оболочка подвержена действию равномерного внутреннего давления интенсивности P и заданному осевому растяжению N_1 . Концы оболочки считаем шарнирно закрепленными, допускающими малые перемещения в осевом направлении (шарнирное скользящее закрепление).

Допустим, что стенка оболочки идеально трехслойная; общая толщина H постоянна, но толщина несущих слоев h кусочно-постоянна. Пусть

$$h = h_j \quad (1.1)$$

при $x \in (a_j, a_{j+1})$, где $j = 0, \dots, n$. Здесь и в дальнейшем из-за симметрии рассмотрим лишь правую половину оболочки (начало координат находится в центральном поперечном сечении), а $a_0 = 0$, $a_{n+1} = l$. Величины h_0 , h_j , a_j ($j = 1, \dots, n$)

считаем предварительно неизвестными постоянными, которые определяются из условия минимума прогиба в центре оболочки $W(0)$ при условии, что объем материала несущих слоев оболочки задан, т.е.

$$\sum_{j=0}^n \gamma_j (\alpha_{j+1} - \alpha_j) = V/h_* \ell, \quad (1.2)$$

где V - заданный объем материала несущих слоев.

В формуле (1.2) и в дальнейшем используются следующие безразмерные величины:

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \frac{a_j}{\ell}, & \gamma_j &= \frac{h_j}{h_*}, & \xi &= \frac{x}{\ell}, & m &= \frac{M}{M_*}, \\ n_{1,2} &= \frac{N_{1,2}}{N_*}, & p &= \frac{AP}{N_*}, & \omega &= \frac{N_* W}{M_*}, & (1.3) \\ \mu &= \frac{N_* \ell^2 U}{M_*^2}, & \omega &= \frac{\ell^2 N_*}{AM_*} \end{aligned}$$

Здесь $N_{1,2}$ - усилия; M - изгибающий момент; U, W - перемещения в осевом и радиальном направлениях; $N_* = 2\delta_0 h_*$; $M_* = \delta_0 h_* H$; h_* - постоянная толщина несущих слоев сравниваемой оболочки, масса которой совпадает с массой оболочки кусочно-постоянной толщины. Очевидно, имеем $V = h_* \ell$.

Материал оболочки считаем идеально жесткопластическим, подчиняющимся условию Губера-Мизеса и ассоциированному закону деформирования. Предположим, что остаются в силе все гипотезы относительно модели материала, которые были использованы в работах [2, 3, 4]. Уравнение аппроксимированной поверхности текучести представим для $\xi \in \mathcal{D}_j$ в виде

$$n_1^2 - n_1 n_2 + n_2^2 + \frac{3}{4} m^2 - \gamma_j^2 = 0, \quad j = 0, \dots, n. \quad (1.4)$$

Через \mathcal{D}_j обозначаются здесь и в дальнейшем промежутки (α_j, α_{j+1}) , где $j = 0, \dots, n$.

Уравнение равновесия и ассоциированный закон деформирования можно записать в форме системы уравнений первого порядка [2, 3, 4] (штрихом обозначается дифференцирование по ξ)

$$\begin{aligned}
m' &= q; \\
q' &= \frac{3\omega n_4 m \omega}{2(2n_2 - n_4)} + \omega(n - n_2); \\
\omega' &= z; \\
z' &= \frac{3\omega m \omega}{2(2n_2 - n_4)}; \\
u' &= -\frac{1}{2}z^2 + \frac{\omega \omega (2n_4 - n_2)}{2n_2 - n_4}.
\end{aligned}
\tag{I.5}$$

При решении оптимизационной задачи следует удовлетворить не только уравнениям (I.5), но и условию пластичности (I.4), а также соответствующим краевым условиям. Так как концы оболочки шарнирно закреплены, то фазовые переменные m , q , ω , z , u удовлетворяют следующим краевым условиям:

$$\begin{aligned}
q(0) &= z(0) = u(0) = 0, \\
m(1) &= \omega(1) = 0.
\end{aligned}
\tag{I.6}$$

Предположим, что напряженное состояние оболочки соответствует повсюду точкам, лежащим на поверхности текучести (I.4). Случай, когда изображающая точка находится внутри поверхности (I.4) (и некоторая часть оболочки остается жесткой), в данной работе не рассматривается. С помощью (I.4) можно из (I.5) исключить величину n_2 . При $\xi \in \mathfrak{D}_j$ ($j = 0, \dots, n$) согласно (I.4) имеем

$$n_2 = \frac{n_4}{2} + \sqrt{\gamma_j^2 - \frac{3}{4}(m^2 + n_4^2)}. \tag{I.7}$$

Отметим, что знак плюс перед квадратным корнем в (I.7) выбран в связи с неотрицательностью величин ω и $2n_2 - n_4$.

Сформулированную задачу будем рассматривать как параметрическую задачу теории оптимального управления, где искомыми постоянными параметрами являются величины γ_j , γ_j^2 , α_j ($j = 1, \dots, n$). Так как величина n_2 претерпевает при $\xi = \alpha_j$ ($j = 1, \dots, n$) согласно (I.7) конечные разрывы, то поставленная задача принадлежит классу задач с разрывными частями [1, 5].

2. Условия оптимальности

Чтобы вывести необходимые условия оптимальности, составим расширенный функционал [1, 5, 7]

$$\begin{aligned}
 I = & \omega(0) + \nu \left\{ \sum_{j=0}^n \gamma_j (\alpha_{j+1} - \alpha_j) - 1 \right\} + \sum_{j=0}^n \int_{\alpha_j}^{\alpha_{j+1}} \{ \psi_1 (m' - q) + \\
 & + \psi_2 \left(q' - \frac{3n_1 \omega m \omega'}{2\sqrt{4\gamma_j^2 - 3(m^2 + n_1^2)}} - \omega \left(n - \frac{n_1}{2} \right) + \frac{\omega}{2} \sqrt{4\gamma_j^2 - 3(m^2 + n_1^2)} \right) + \\
 & + \psi_3 (\omega' - \bar{\omega}) + \psi_4 \left(\bar{\omega}' - \frac{3\omega m \omega'}{2\sqrt{4\gamma_j^2 - 3(m^2 + n_1^2)}} \right) + \\
 & + \psi_5 \left(\frac{4\epsilon'}{2} + \frac{\omega \omega' (3n_1 - \sqrt{4\gamma_j^2 - 3(m^2 + n_1^2)})}{2\sqrt{4\gamma_j^2 - 3(m^2 + n_1^2)}} \right) \} d\xi. \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

Здесь ν — постоянный множитель Лагранжа, ψ_1, \dots, ψ_5 — сопряженные переменные, которые вводятся для учета основных уравнений. Уравнение (1.4) в явном виде в (2.1) не указано, но оно учтено при определении величины n_2 .

Вычислим полную вариацию функционала (2.1). Полные и слабые вариации фазовых переменных в точках $\xi = \alpha_j$ ($j = 1, \dots, n$) связаны следующим образом:

$$\Delta y(\alpha_j) = \delta y(\alpha_j \pm) + y'(\alpha_j \pm) \Delta \alpha_j. \quad (2.2)$$

Через $\delta y(\alpha_j \pm)$ обозначаются здесь разносторонние слабые вариации переменной y в точке $\xi = \alpha_j$. Следует подчеркнуть, что все фазовые переменные непрерывны. Поэтому считаем равными между собой разносторонние полные вариации величин m , q , ω , $\bar{\omega}$, 4ϵ .

Приравняв к нулю полную вариацию функционала (2.1), приходим к уравнению

$$\begin{aligned}
& \delta\omega(0) + \sum_{j=1}^n v(\gamma_{j-1} - \gamma_j) \Delta\alpha_j + \sum_{j=0}^n \{ \Delta\gamma_j v(\alpha_{j+1} - \alpha_j) + \\
& + \int_{\mathcal{Q}_j} (-\psi_1' \delta m - \psi_1 \delta q - \psi_2' \delta q - \psi_2 \delta\omega - \psi_3 \delta z - \psi_4' \delta z - \psi_5' \delta u + \\
& + \psi_5 z \delta z) - \frac{3\omega(\psi_2 + n_1 \psi_2) m \delta\omega + \omega \psi_2 (-4\gamma_j \Delta\gamma_j + 3m \delta m)}{2\sqrt{4\gamma_j^2 - 3(m^2 + n_1^2)}} - \\
& - \frac{3\omega(\psi_4 + n_1 \psi_2) \omega (\delta m (4\gamma_j^2 - 3n_1^2) - 4\gamma_j m \Delta\gamma_j)}{2(4\gamma_j^2 - 3(m^2 + n_1^2))^{\frac{3}{2}}} + \\
& + \frac{3\omega n_1 \psi_2 \omega (4\gamma_j \Delta\gamma_j - 3m \delta m)}{2(4\gamma_j^2 - 3(m^2 + n_1^2))^{\frac{3}{2}}} - \frac{\omega \psi_2 \delta\omega \left(\frac{3n_1}{\sqrt{4\gamma_j^2 - 3(m^2 + n_1^2)}} - \right. \\
& \left. - 1 \right) \delta \xi + \psi_1(\alpha_{j+1}-) \delta m(\alpha_{j+1}-) + \psi_2(\alpha_{j+1}-) \delta q(\alpha_{j+1}-) + \\
& + \psi_3(\alpha_{j+1}-) \delta\omega(\alpha_{j+1}-) + \psi_4(\alpha_{j+1}-) \delta z(\alpha_{j+1}-) + \psi_5(\alpha_{j+1}-) \delta u(\alpha_{j+1}-) - \\
& - \psi_1(\alpha_j+) \delta m(\alpha_j+) - \psi_2(\alpha_j+) \delta q(\alpha_j+) - \psi_3(\alpha_j+) \delta\omega(\alpha_j+) - \\
& - \psi_4(\alpha_j+) \delta z(\alpha_j+) - \psi_5(\alpha_j+) \delta u(\alpha_j+)} \} = 0.
\end{aligned} \quad (2.3)$$

Отсюда получим сопряженную систему в виде

$$\begin{aligned}
\psi_1' &= -\frac{3\omega}{2} \cdot \frac{\omega(\psi_2 + n_1 \psi_2)(4\gamma_j^2 - 3n_1^2) + 3n_1 \psi_2 m \omega}{(\sqrt{4\gamma_j^2 - 3(m^2 + n_1^2)})^3} + \frac{(-3)\omega m \psi_2}{2\sqrt{4\gamma_j^2 - 3(m^2 + n_1^2)}}, \\
\psi_2' &= -\psi_1, \\
\psi_3' &= \frac{3}{2} \frac{\omega m (\psi_4 + n_1 \psi_2)}{\sqrt{4\gamma_j^2 - 3(m^2 + n_1^2)}} - \frac{\omega \psi_2}{2} \left(\frac{3n_1}{\sqrt{4\gamma_j^2 - 3(m^2 + n_1^2)}} - 1 \right); \\
\psi_4' &= -\psi_3 + \psi_5 z; \\
\psi_5' &= 0
\end{aligned} \quad (2.4)$$

для каждого промежутка \mathcal{Q}_j ($j = 0, \dots, n$).

Так как в конечных точках оптимальной траектории (при $\xi = \alpha_0 = 0$ и $\xi = \alpha_{n+1} = 1$) слабые вариации фазовых переменных равны соответствующим полным вариациям, то с учетом краевых условий (I.6) из (2.3) следуют условия трансверсальности

$$\psi_1(0) = 0, \quad \psi_3(0) = 1, \quad \psi_2(1) = \psi_4(1) = \psi_5(1) = 0. \quad (2.5)$$

С помощью (2.4) и (2.5) можно уравнению (2.3) придать вид

$$\sum_{j=1}^n \left\{ v(\gamma_{j-1} - \gamma_j) \Delta \alpha_j - [\psi_1 \delta m + \psi_2 \delta q + \psi_3 \delta w + \psi_4 \delta z + \right. \\ \left. + \psi_5 \delta u] \Big|_{\xi=\alpha_j} \right\} + \sum_{j=0}^n \left\{ v(\alpha_{j+1} - \alpha_j) + \int_{\alpha_j}^{\alpha_{j+1}} \left(\frac{2\omega \psi_3 \gamma_1}{\sqrt{4\gamma_j^2 - 3(m^2 + n_j^2)}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{6\omega \omega m \gamma_j (\psi_4 + n_j \psi_2) + 6\psi_5 \omega n_j \omega \gamma_j}{(4\gamma_j^2 - 3(m^2 + n_j^2))^{3/2}} \right) d\xi \right\} \Delta \gamma_j = 0, \quad (2.6)$$

где квадратными скобками обозначается конечный разрыв.

Поскольку $\Delta \gamma_j$ — произвольные приращения величин γ_j ($j = 0, \dots, n$), то из (2.6) следуют требования

$$v(\alpha_{j+1} - \alpha_j) + 2\omega \int_{\alpha_j}^{\alpha_{j+1}} \left(\frac{\psi_3}{(4\gamma_j^2 - 3(m^2 + n_j^2))^{1/2}} + \right. \\ \left. + \frac{3(\psi_4 + n_j \psi_2) \omega m + 3\psi_5 n_j \omega}{(4\gamma_j^2 - 3(m^2 + n_j^2))^{3/2}} \right) d\xi \cdot \gamma_j = 0, \quad j = 0, \dots, n. \quad (2.7)$$

Переходя в (2.6) с учетом (2.2) к полным вариациям, приходим к соотношению

$$\sum_{j=1}^n \left\{ (v(\gamma_{j-1} - \gamma_j) + [H(\alpha_j)] \Delta \alpha_j - [\psi_1(\alpha_j)] \Delta m(\alpha_j) - [\psi_2(\alpha_j)] \Delta q(\alpha_j) - \right. \\ \left. - [\psi_3(\alpha_j)] \Delta w(\alpha_j) - [\psi_4(\alpha_j)] \Delta z(\alpha_j) - [\psi_5(\alpha_j)] \Delta u(\alpha_j) \right\} = 0, \quad (2.8)$$

где $H = \psi_1 m' + \psi_2 q' + \psi_3 w' + \psi_4 z' + \psi_5 u'$.

В (2.8) считаем независимыми вариациями

$\Delta m(\alpha_j), \Delta q(\alpha_j), \Delta w(\alpha_j), \Delta z(\alpha_j), \Delta u(\alpha_j), \quad j = 1, \dots, n.$

Это приводит к требованию непрерывности сопряженных переменных

$$[\psi_i(\alpha_j)] = 0, \quad i = 1, \dots, 5; \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.9)$$

Считая, наконец, произвольными приращения $\Delta \alpha_j$ ($j = 1, \dots, n$), получим из (2.8) условия

$$v(\gamma_{j-1} - \gamma_j) + [H(\alpha_j)] = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.10)$$

Рассмотрим последнее уравнение в системе (2.4). С учетом краевых условий (2.5) и условий непрерывности (2.9) установим, что

$$\psi_5 = 0 \quad (2.11)$$

при $\xi_j \in (0, 1)$. Последнее обстоятельство вместе с тем, что согласно физическим соображениям $[m'(\alpha_j)] = [\omega'(\alpha_j)] = 0$, позволяет придать условиям (2.10) вид

$$v(\gamma_{j-1} - \gamma_j) + \psi_2(\alpha_j)[q'(\alpha_j)] + \psi_1(\alpha_j)[z'(\alpha_j)] = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.12)$$

Определяя из первого уравнения в системе (2.7)

$$v = -\frac{2\omega\gamma_0}{\alpha_1} \int_0^{\alpha_1} \frac{\psi_2(4\gamma_0^2 - 3(m^2 + n_1^2)) + 3\omega m(\psi_1 + n_1\psi_2)}{(4\gamma_0^2 - 3(m^2 + n_1^2))^{3/2}} d\xi, \quad (2.13)$$

вместо (2.7) имеем

$$\int_{\alpha_j}^{\alpha_{j+1}} \frac{\psi_2(4\gamma_j^2 - 3(m^2 + n_j^2)) + 3\omega m(\psi_1 + n_j\psi_2)}{(4\gamma_j^2 - 3(m^2 + n_j^2))^{3/2}} d\xi + \frac{v}{2\omega\gamma_j}(\alpha_{j+1} - \alpha_j) = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.14)$$

Отметим, что в случаях, когда толщина γ_0 задана, уравнение (2.13) отпадает. Тогда воспользуемся для определения величины v следующим уравнением в системе (2.7).

3. Численное решение. Обсуждение результатов

Чтобы решить задачу до конца, следует проинтегрировать системы (1.5) и (2.4) с помощью краевых условий (1.6) и (2.5). Имея в виду (2.11), уравнениям (2.4) можно придать более простой вид:

$$\begin{aligned} \psi_1' &= -\frac{3\omega}{2} \cdot \frac{\omega(\psi_1 + n_1\psi_2)(4\gamma_j^2 - 3n_1^2) + m\psi_2(4\gamma_j^2 - 3(m^2 + n_1^2))}{(4\gamma_j^2 - 3(m^2 + n_1^2))^{3/2}}, \\ \psi_2' &= -\psi_1, \\ \psi_0' &= -\frac{3\omega m(\psi_1 + n_1\psi_2)}{2\sqrt{4\gamma_j^2 - 3(m^2 + n_1^2)}}, \\ \psi_1' &= -\psi_2. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Системы (1.5) и (3.1) интегрируем совместно методом типа сопряженных уравнений, разработанным для решения прямых и оптимизационных задач геометрически нелинейных цилиндрических оболочек [2, 3, 4]. При решении сформулированной краевой задачи задаем величины $\gamma_0, \gamma_j, \alpha_j$ ($j = 1, \dots, n$). Для определения этих неизвестных параметров организуем следующий итерационный процесс. Подставляя найденные на предыдущем шаге итерации значения фазовых и сопряженных переменных в уравнения (2.12) – (2.14) определяем новые значения параметров согласно формулам

$$\gamma_j - \gamma_{j-1} = \frac{1}{v} (\psi_2(\alpha_j) [\eta'(\alpha_j)] + \psi_2(\alpha_j) [\xi'(\alpha_j)]); \quad j=1, \dots, n \quad (3.2)$$

и

$$\alpha_j = \alpha_{j+1} + \frac{2\omega\gamma_j}{v} \int_{\alpha_j}^{\alpha_{j+1}} \frac{\psi_2(4\gamma_j^2 - 3(m^2 + n_1^2)) + 3\omega m(\psi_4 + n_1\psi_2)}{(4\gamma_j^2 - 3(m^2 + n_1^2))^{3/2}} dz \quad (3.3)$$

На каждом шаге итерации вычисляется величина v с помощью (2.13), если $\Delta\gamma_0 \neq 0$, и подставляется в правые части уравнений (3.2), (3.3). Если γ_0 предварительно фиксирована, то получим для определения множителя v аналогичное (2.13) уравнение.

Отметим, что после исключения из (3.2), (3.3) величины v имеем систему с $2n$ уравнениями относительно $2n+1$ неизвестных. Неизвестными являются $\gamma_0, \gamma_j, \alpha_j$ ($j=1, \dots, n$). Добавляя к системе (3.2), (3.3) уравнение (1.2), получим систему, где число неизвестных и уравнений совпадает.

В качестве примера рассмотрим частный случай, когда $n=1$. Оптимальные значения параметров $\alpha, \gamma_0, \gamma_1$, полученные при численном решении задачи и соответствующие величинам $\omega=4, n_1=1,48, n_2=0,4$, приведены в табл. I.

Табл. I

α	γ_0	γ_1	$m(0)$	ω_{\max}
1,0	1,0	-	-0,7449	4,6934
0,5	1,3333	0,6667	-0,7980	1,0830
0,571	1,3904	0,4825	-0,6305	0,4222

Первая строка в табл. I соответствует оболочке с постоянной толщиной несущих слоев, вторая — пропорциональному распределению материала несущих слоев, а третья — оптимальному проекту оболочки при $n=1$. Если максимальные прогибы оболочки обозначить соответственно через ω_n, ω_{np} и ω_{opt} , то из табл. I видно, что

$$\omega_{np} = 0.234; \quad \omega_{opt} = 0.090\omega_n; \quad \omega_{opt} = 0.39\omega_{np} \quad (3.4)$$

Соотношения (3.4) характеризуют эффективность проектов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Принцип максимума в теории оптимального управления. Минск, "Наука и техника", 1974.
2. Леллеп Я., Маяк Ю., Оптимизация жесткопластических геометрически нелинейных цилиндрических оболочек. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1988, 799, 27-36.

3. Леллеп Я., Ханнус С., Большие прогибы жестко-пластических замкнутых цилиндрических оболочек. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1983, 659, 59-65.
4. Леллеп Я.А., Ханнус С.Х., Большие прогибы цилиндрической оболочки из жесткопластического материала. Прикл. мех., 1987, № 5, 30-36.
5. Троицкий В.А., Оптимальные процессы колебаний механических систем. Л., "Машиностроение", 1976.
6. Cinquini C., Kouam M., Optimal plastic design of stiffened shells. Int. J. Solids and Struct., 1983, 19, № 9, 773-783.
7. Lellep J., Parametrical optimization of plastic cylindrical shells in the post-yield range. Int. J. Eng. Sci., 1985, 23, № 12, 1289-1303.
8. Save M., Limit analysis and design: an up-to-date subject of engineering plasticity. Plasticity Today: Modelling, Meth. and Appl. London, New York, 1985, 767-784.

Optimal design of rigid-plastic cylindrical shells
with piece-wise constant thickness

J. Lellep, S. Hannus

Summary

An optimal design method developed for rigid-plastic circular cylindrical shells is presented. The effect of geometrical changes on the load carrying capacity of the shell is taken into account. It is assumed that the deflections of the shell are moderately large and the material is ideally rigid-plastic obeying Von Mises yield condition. A non-linear approximation of the exact yield surface accompanied by the associated deformation law is employed. The design of the sandwich shell with fixed material volume and piece-wise constant face-sheet thicknesses is sought for under the condition that the central deflection attains the minimum value. Necessary optimality conditions are derived with the aid of the optimal control theory. A numerical example regarding the shell thickness with two steps is given.

ИЗГИБ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАСПРЕДЕЛЁННОГО ИМПУЛЬСНОГО НАГРУЖЕНИЯ

Г. Оленев

Тартуский государственный университет

В данной работе рассматривается задача изгиба заделанной с обоих концов жёсткопластической круговой цилиндрической оболочки произвольной геометрии, подверженной импульсному нагружению, равномерно распределённому на некотором участке длины, расположенном симметрично относительно середины оболочки. Данная задача обобщает рассмотренную в [3] задачу изгиба равномерно нагруженной заделанной с обоих концов жёсткопластической цилиндрической оболочки.

Задача изгиба заделанной с обоих концов жёсткопластической цилиндрической оболочки под действием равномерной нагрузки прямоугольного типа при использовании предельной кривой в виде квадрата была исследована в [7] и обобщена в [6] на случай динамического давления, которое равномерно приложено к участку длины, расположенному симметрично относительно середины оболочки.

Отметим, что механизмы движения равномерно импульсно нагруженной заделанной с обоих концов жёсткопластической балки [1] и равномерно импульсно нагруженной жёсткопластической консольной балки [2] аналогичны механизмам движения соответствующих задач изгиба заделанной с обоих концов короткой жёсткопластической цилиндрической оболочки [3] и заделанной с одного и свободной с другого конца короткой жёсткопластической цилиндрической оболочки [4], подверженных равномерному импульсному нагружению. Эта аналогия уже не наблюдается в соответствующих случаях длинных цилиндрических оболочек. Как показывают результаты данной работы, предложенные в [5] механизмы движения заделанной с обоих концов жёсткопластической балки, подверженной импульсному нагружению, равномерно распределённому на некотором центральном участке, который расположен симметрично относительно центрального сечения балки, аналогичны рассматриваемым в данной статье механизмам движе-

ния цилиндрической оболочки только для короткой оболочки; в случае длинной цилиндрической оболочки её механизмы движения уже значительно отличаются от механизмов движения соответствующим образом нагруженной и закреплённой балки.

I. Постановка задачи и основные соотношения

Рассмотрим жёсткопластическую цилиндрическую оболочку длины ℓ , оба конца которой жёстко заделаны. Начало координатной оси Ox , направленной по образующей оболочки, поместим в левом конце оболочки. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ оболочка не деформирована, её точки с координатами x , удовлетворяющими условиям $0 \leq x \leq \alpha$ или $\ell - \alpha \leq x \leq \ell$, где $0 \leq \alpha < \frac{\ell}{2}$, находятся в покое, а точки оболочки с координатами x , удовлетворяющими условию $\alpha < x < \ell - \alpha$, имеют одинаковую скорость v_0 по направлению внешней нормали к срединной поверхности оболочки.

Уравнение движения цилиндрической оболочки и начальные условия имеют следующий безразмерный вид:

$$m'(\xi, \tau) = \ddot{w}(\xi, \tau) - c^2 \pi(\xi, \tau), \quad (I.1)$$

$$w(\xi, 0) = 0, \quad (I.2)$$

$$\dot{w}(\xi, 0) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \xi \leq \alpha \quad \text{или} \quad \ell - \alpha \leq \xi \leq \ell, \\ 1, & \alpha < \xi < \ell - \alpha, \end{cases} \quad (I.3)$$

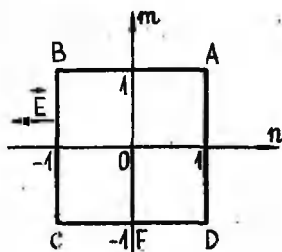
$$\xi = \frac{x}{\ell}, \quad \alpha = \frac{a}{\ell}, \quad m = \frac{M}{M_0}, \quad n = \frac{N}{N_0},$$

$$\tau = \frac{\sigma_0 h^2}{4\mu \ell^2 v_0} t, \quad w = \frac{\sigma_0 h^2}{4\mu \ell^2 v_0} W, \quad c^2 = \frac{4\ell^2}{hR}, \quad (I.4)$$

где h и R - толщина и радиус оболочки соответственно, μ - поверхностная плотность оболочки, σ_0 - предел текучести материала оболочки, $M = M(x, t)$, M_0 , $N = N(x, t)$ и N_0 - осевой и предельный осевой изгибающие моменты, окружная сила и предельная окружная сила на единицу длины соответственно, $W = W(x, t)$ - прогиб по направлению внешней нормали к срединной поверхности оболочки, t - время. Здесь и далее штрихи и точки обозначают дифференцирование по ξ и τ соответственно.

Далее вследствие симметрии задачи относительно середины оболочки будем рассматривать только левую её половину ($0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}$).

Будем пользоваться предложенным Ходжем [7] условием те-



Фиг. 1

кучести, при котором предельная кривая ограничивает квадрат $|m| \leq 1$, $|n| \leq 1$ (фиг. 1). Вектор скоростей деформации для цилиндрической оболочки при этом имеет вид

$$\vec{E} = (-\dot{\omega}, -\frac{1}{c^2} \dot{\omega}^2). \quad (1.5)$$

Отметим, что в силу симметрии предельной кривой, которая используется в данной работе, решение, полученное здесь, справед-

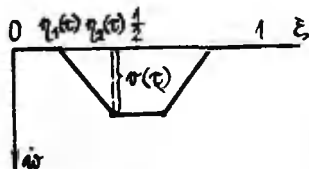
ливо не только для внутренней, но и для внешней импульсной нагрузки (в этом случае по сравнению с решением при внутренней нагрузке меняются знаки у функций $m(\xi, \tau)$, $n(\xi, \tau)$ и $\omega(\xi, \tau)$).

Как видно из дальнейшего, механизмы движения оболочки существенно зависят от длины оболочки, а точнее - от величины параметра c^2 , и от значения параметра α , определяющего характер приложения нагрузки.

2. Деформация оболочки при больших значениях параметров c и α

При указанных в заглавии данного пункта условиях движение оболочки происходит в двух фазах.

Фаза II. Рассматриваемая фаза движения начинается с того, что по два шарнира начинают двигаться от сечений оболочки с координатами $\xi = \alpha$ и $\xi = 1 - \alpha$. Пусть для левой половины оболочки $0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}$



Фиг. 2

эта пара шарниров имеет координаты q_1 и q_2 . Соответствующий механизм и параметры движения показаны на фиг. 2.

При этом имеем

$$\dot{\omega} = \begin{cases} 0, & 0 \leq \xi \leq \eta_1(\tau), \\ \sigma(\tau) \frac{\xi - \eta_1}{\eta_2 - \eta_1}, & \eta_1(\tau) \leq \xi \leq \eta_2(\tau), \\ \sigma(\tau), & \eta_2(\tau) \leq \xi \leq \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (2.1)$$

На отрезке $0 \leq \xi \leq \eta_1$ оболочка находится в режиме F, где F — середина стороны CD квадрата ABCD (фиг. 1), представляющего собой предельную кривую. При этом для $0 \leq \xi \leq \eta_1$ имеют место равенства $m(\xi, \tau) = -1$ и $n(\xi, \tau) = 0$ и уравнение (I.1) на этом отрезке удовлетворяется тождественно.

В промежутке $\eta_1 \leq \xi \leq \frac{1}{2}$ выполняются условия $\dot{\omega}' = 0$ и $\dot{\omega} > 0$, поэтому, учитывая вид вектора течения (I.5) и принимая во внимание его ортогональность к предельной кривой, получим, что в этом случае имеет место режим BC (фиг. 1). Поэтому при решении уравнения (I.1) мы должны взять $n = -1$. Отметим, что при $\xi = \eta_1$ происходит скачок величины окружной силы с нуля до минус единицы.

Продифференцируем (2.1) по времени на отрезке $\eta_1 \leq \xi \leq \frac{1}{2}$ и подставим полученный результат в (I.1).

Интегрируя уравнение (I.1) на отрезке $\eta_1 \leq \xi \leq \frac{1}{2}$ с учётом условий

$$m(\eta_2, \tau) = 1, \quad m'(\eta_2, \tau) = m'(\frac{1}{2}, \tau) = 0,$$

получим, что $m(\xi, \tau) = 1$ на отрезке $\eta_1 \leq \xi \leq \frac{1}{2}$ и что $\dot{\omega} = -c^2$. Из последнего равенства, принимая во внимание следующее из (I.3) условие $\sigma(0) = 1$, находим, что

$$\sigma(\tau) = 1 - c^2 \tau. \quad (2.2)$$

Дважды интегрируя уравнение (I.1) на отрезке $\eta_1 \leq \xi \leq \eta_2$ с учётом условий

$$m(\eta_1, \tau) = -1, \quad m(\eta_2, \tau) = 1, \quad m'(\eta_1, \tau) = m'(\eta_2, \tau) = 0$$

и принимая во внимание (2.2), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения η_1 и η_2

$$\begin{cases} (1 - c^2 \tau) x \dot{x} = 24 - c^2 x^2 \\ (1 - c^2 \tau) x \dot{\eta}_2 = 12, \end{cases} \quad (2.3)$$

где $x = \eta_2 - \eta_1$.

Принтегрировав эту систему с учётом условий $\eta_1(0) = \eta_2(0) = \alpha$, получим

$$\eta_1(\tau) = \frac{\sqrt{6}}{c} \left(\ln \frac{1 + \sqrt{1 - \sigma^2(\tau)}}{\sigma(\tau)} - 2\sqrt{1 - \sigma^2(\tau)} \right) + \alpha, \quad (2.4)$$

$$\eta_2(\tau) = \frac{\sqrt{6}}{c} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \sigma^2(\tau)}}{\sigma(\tau)} + \alpha, \quad (2.5)$$

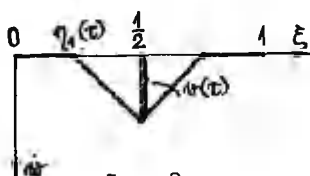
где $\sigma(\tau) = 1 - c^2 \tau$.

Отметим, что рассматриваемый здесь механизм движения в начальной фазе справедлив для любых возможных значений параметров c и α . Однако характер механизмов движения в следующей фазе существенно зависит от величины параметров c и α и определяется путём исследования поведения функций (2.4) и (2.5). Центральной идеей при этом исследовании является то обстоятельство, что в случае, если шарнир η_1 достигнет заделки в момент времени τ_0 , то это произойдёт позже, чем шарнир η_2 достигнет середины оболочки, в том и только в том случае, когда имеет место неравенство $x(\tau_0) = \eta_2(\tau_0) - \eta_1(\tau_0) > \frac{1}{2}$. Не вдаваясь в целях краткости в подробности и вводя обозначения

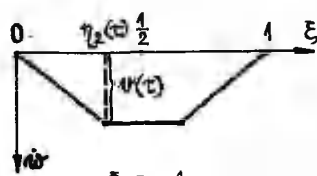
$$\varphi(c) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2c} \ln \frac{4\sqrt{6} + c}{4\sqrt{6} - c}, \quad \psi(c) = \frac{1}{c} \sqrt{6} [\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2})],$$

можно показать следующее.

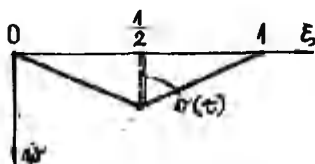
В случае, если $\psi(c) < \alpha < \frac{1}{2}$, $c > 0$, то шарнир η_1 никогда не достигнет заделки, и начальная фаза движения заканчивается тем, что шарнир η_2 достигает середины оболочки, т. е. в следующей фазе имеет место механизм движения, показанный на фиг. 3. В случае, если $0 < \alpha < \psi(c)$, $\alpha < \frac{1}{2}$, $c > 0$, то при



Фиг. 3

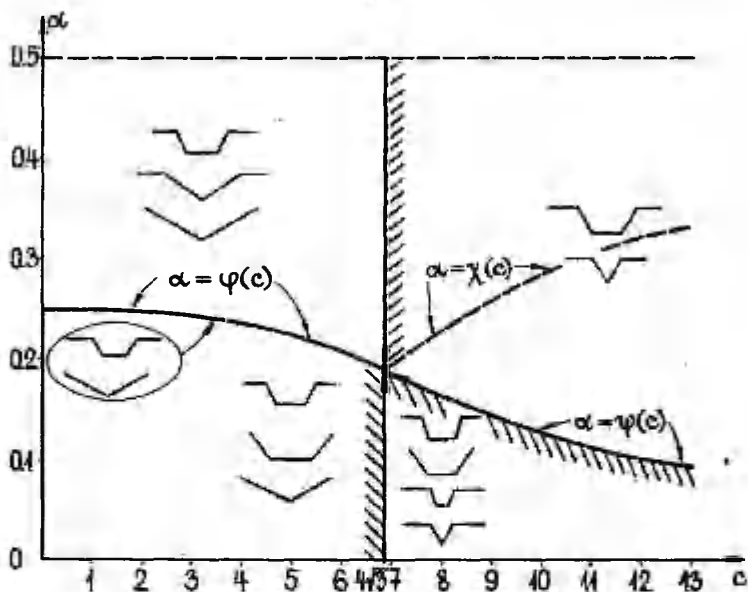


Фиг. 4



Фиг. 5

следующих условиях, наложенных на параметры c и α : 1) $\alpha > \varphi(c)$, $0 < c < 4\sqrt{3}$; 2) $\alpha < \varphi(c)$, $0 < c \leq 4\sqrt{3}$ или $c > 4\sqrt{3}$; 3) $\alpha = \varphi(c)$, $0 < c \leq 4\sqrt{3}$ – механизмы движения в следующей фазе показаны соответственно на 1) фиг. 3; 2) фиг. 4; 3) фиг. 5. Эти же результаты схематично указаны и на фиг. 6, где множество точек $\{(c, \alpha) : c > 0, 0 \leq \alpha < \frac{1}{2}\}$ разбито на подмножества



Фиг. 6.

таким образом, что, забегая вперёд, для каждого из этих подмножеств указана соответствующая последовательность механизмов движения. Заметим, что пунктирной линией на фиг. 6 указана функция $\chi(c) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{6}}{c} \ln(1 + \sqrt{2})$ такая, что при $\alpha = \chi(c)$, $c > 4\sqrt{3}$ вторая фаза движения оболочки будет модальной (все шарниры будут стационарными); если же $\max\{\varphi(c), \chi(c)\} < \alpha < \frac{1}{2}$, $c > 0$, то во второй фазе шарнир η_1 (фиг. 3) будет двигаться влево; если же $\varphi(c) < \alpha < \chi(c)$, $c > 4\sqrt{3}$, то этот шарнир во второй фазе будет двигаться вправо.

Однако вернёмся к рассмотрению деформации оболочки при больших значениях параметров c и α , т.е. к случаю, когда $\varphi(c) < \alpha < \frac{1}{2}$, $c > 4\sqrt{3}$. В этом случае, как уже было указано, фаза II заканчивается в момент времени τ_{11} , когда шарнир η_1 достигает середины оболочки. Из (2.5) и условия $\eta_1(\tau_{11}) = \frac{1}{2}$ находим, что

$$\tau_{11} = \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{2\lambda}{\lambda^2 + 1} \right), \quad (2.6)$$

где $\lambda = \exp \frac{(\eta_2 - \eta_1)c}{\sqrt{6}}$.

При этом, учитывая (I.2), (2.2) и (2.6), найдём максимальный прогиб в конце фазы движения II

$$\omega\left(\frac{1}{2}, \tau_{11}\right) = \frac{(\lambda^2 - 1)^2}{2c^2(\lambda^2 + 1)^2}. \quad (2.7)$$

Приведём также формулу для осевого изгибающего момента на отрезке $[\eta_1, \eta_2]$ в течение этой фазы

$$m(\xi, \tau) = \frac{2(\xi - \eta_1)^2(\eta_2 - 2\xi - \eta_1)}{(\eta_2 - \eta_1)^3} - 1, \quad (2.8)$$

откуда видно, что функция $m(\xi, \tau)$ на отрезке $\eta_1 \leq \xi \leq \eta_2$ монотонно возрастает от минус единицы до единицы.

Фаза II. Механизм движения и параметры движения для этой фазы показаны на фиг. 3, а поле скоростей при этом записывается в виде

$$\dot{\omega}(\xi, \tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \xi \leq \eta_1(\tau), \\ \sigma(\tau) \frac{\xi - \eta_1}{\frac{1}{2} - \eta_1}, & \eta_1(\tau) \leq \xi \leq \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (2.9)$$

На отрезке $0 \leq \xi \leq \eta_1$ опять имеем $m(\xi, \tau) = -1$ и $n(\xi, \tau) = 0$, а при $\eta_1 \leq \xi \leq \frac{1}{2}$ имеет место равенство $n(\xi, \tau) = -1$.

Дифференцируя (2.9) по времени, подставляя полученный результат в (I.1) и интегрируя последнее уравнение на отрезке $\eta_1 \leq \xi \leq \frac{1}{2}$ с учётом условий

$$m(\eta_1, \tau) = -1, \quad m\left(\frac{1}{2}, \tau\right) = 1, \quad m'(\eta_1, \tau) = m'\left(\frac{1}{2}, \tau\right) = 0,$$

приходим к автономной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{\phi} = -c^2 - \frac{12}{z_1^2}, \\ 4\dot{z}_1 = -c^2 z_1 + \frac{12}{z_1}, \end{cases} \quad (2.10)$$

где $z_1 = \frac{1}{2} - \eta_1$.

Выражая σ из второго уравнения этой системы и подстав-

для это значение в первое уравнение, получим дифференциальное уравнение относительно \bar{x}_1

$$(12 - c^2 \bar{x}_1^2) \frac{\ddot{\bar{x}}_1}{\bar{x}_1 \dot{\bar{x}}_1} = 0,$$

откуда $\ddot{\bar{x}}_1 = 0$.

Учитывая непрерывность функций η_1 , $\dot{\eta}_1$ и σ в момент времени $\tau = \tau_{1f}$, при решении уравнения $\ddot{\bar{x}}_1 = 0$ с учётом (2.10) получим, что для рассматриваемой фазы движения

$$\eta_1(\tau) = -A\tau + A\tau_{1f} - B + \frac{1}{2}, \quad \sigma(\tau) = -c^2 \bar{x} + \frac{12}{A(1/2 - \eta_1(\tau))} - \frac{12}{AB} + 1, \quad (2.11)$$

где

$$A = \frac{c(-\lambda^2 + 6\lambda^2 - 1)\sqrt{6}}{2\lambda(\lambda^2 - 1)}, \quad B = \frac{2\sqrt{6}}{c} \cdot \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1}. \quad (2.12)$$

Момент окончания движения τ_{1f} , определяемый из условия $\sigma(\tau_{1f}) = 0$, равен

$$\tau_{1f} = \frac{1}{c^2} \left[1 - \frac{2\lambda}{\lambda^2(1 + \sqrt{2}) + 1 - \sqrt{2}} \right]. \quad (2.13)$$

При этом можно показать, что $\eta_1(\tau_{1f}) = \frac{1}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{c}$.

Принимая во внимание (2.5), (2.7) и (2.11) - (2.13), находим, что максимальный остаточный прогиб оболочки в этом случае равен

$$\psi\left(\frac{1}{2}, \tau_{1f}\right) = \frac{(\lambda^2 - 1)^2}{2c^2(\lambda^2 - 6\lambda^2 + 4)} \left[1 + \frac{16\lambda^2}{\lambda^2 - 6\lambda^2 + 4} \ln \frac{\lambda^2 + 1}{(\lambda^2 - 4)\sqrt{2}} \right]. \quad (2.14)$$

Осевой изгибающий момент в течение фазы I2 на отрезке $\left[\eta_1, \frac{1}{2}\right]$ имеет вид

$$m(\xi, \tau) = \frac{2(\xi - \eta_1)^2 \left(\frac{3}{2} - 2\xi - \eta_1 \right)}{\left(\frac{1}{2} - \eta_1 \right)^3} - 1, \quad (2.15)$$

откуда видно, что функция $m(\xi, \tau)$ на отрезке $\eta_1 \leq \xi \leq \frac{1}{2}$ возрастает от минус единицы до единицы.

3. Деформация оболочки при малых значениях параметра c и больших значениях параметра α

В этом случае на значения параметров c и α налагаются условия $\varphi(c) < \alpha < \frac{1}{2}$, $0 < c < 4\sqrt{3}$. Первые две фазы движения (фазы 2I и 22) при этом совпадают с фазами II и I2. Однако фаза 22 заканчивается не в момент времени, когда движение

оболочки прекращается, т.е. когда функция ψ становится равной нулю, а в момент времени τ_{22} , когда шарнир η_1 достигает заделки.

Учитывая, что ход рассуждений, позволяющий находить параметры движения, моменты времени окончания фаз движения, максимальные прогибы оболочки в конце фаз движения и формулы для осевого изгибающего момента и окружной силы в течение фаз движения, всюду в дальнейшем аналогичен соответствующим рассуждениям, приведённым в пункте 2, мы в целях краткости изложения далее ограничимся лишь указанием фигуры, на которой изображена эпюра скоростей прогибов в соответствующей фазе движения, и приведём необходимые результаты.

Ф а з ы 2I и 22. Для фаз движения 2I и 22 механизмы и параметры движения показаны на фиг. 2 и фиг. 3 соответственно. При этом формулы (2.2), (2.4) - (2.7) и (2.II) - (2.I2) остаются в силе, если учесть, что $\tau_{21} = \tau_{11}$ и $\psi(\frac{1}{2}, \tau_{22}) = \psi(\frac{1}{2}, \tau_{11})$, где τ_{21} - момент окончания фазы 2I. Момент окончания τ_{22} фазы 22 находится, как отмечено выше, из условия $\eta_1(\tau_{22}) = 0$, где $\eta_1(\tau)$ вычисляется по формулам (2.II) - (2.I2), откуда

$$\tau_{22} = \frac{1}{c^2} \left[1 + \lambda \frac{2\sqrt{6}(\lambda^2 + 1) - c(\lambda^2 - 1)}{(\lambda^2 - 6\lambda^2 + 1)\sqrt{6}} \right]. \quad (3.1)$$

Учитывая (2.6), (2.7), (2.II), (2.I2), (3.1) и тот факт, что $\tau_{21} = \tau_{11}$, найдём максимальный прогиб оболочки в конце фазы движения 22

$$\psi(\frac{1}{2}, \tau_{22}) = \frac{(\lambda^2 - 1)^2}{c^2(\lambda^2 - 6\lambda^2 + 1)^2} \left[\frac{1}{2}(\lambda^2 + 1)^2 - \frac{c^2\lambda^2}{12} + 3\lambda^2 \ln \frac{c(\lambda^2 + 1)}{4\sqrt{6}(\lambda^2 - 1)} \right].$$

Соотношение $n(\xi, \tau) = -\rho g n \psi(\xi, \tau)$ для окружной силы и нетривиальные формулы (2.8) и (2.I3) для осевого изгибающего момента в течение фаз 2I и 22 соответственно также остаются в силе.

Ф а з а 23. Механизм и параметр движения $\Phi(\tau)$ для этой фазы показаны на фиг. 5. Проводя рассуждения, аналогичные проведённым в пункте 2, для параметра движения $\Phi(\tau)$, момента окончания движения $\tau_{2\Phi}$ и максимального остаточного прогиба $\psi(\frac{1}{2}, \tau_{2\Phi})$ в этом случае получим формулы

$$\Phi(\tau) = -\frac{3}{2}(c^2 + 16)\tau + \frac{3\sqrt{6}(c^2 + 16)(\lambda - 1)(\lambda^2 + 4\lambda + 1) - c(c^2 + 16\lambda)\lambda(\lambda + 1)}{2\sqrt{6}c^2(\lambda^2 - 6\lambda^2 + 1)},$$

$$\tau_{2\Phi} = \frac{\lambda - 1}{c^2(\lambda^2 - 6\lambda^2 + 1)} \left[(\lambda - 1)(\lambda^2 + 4\lambda + 1) - \frac{c(c^2 + 16\lambda)\lambda(\lambda + 1)}{3\sqrt{6}(c^2 + 16)} \right], \quad (3.2)$$

$$\omega(\frac{1}{2}, \tau_{21}) = \frac{(\lambda^2 - 1)^2}{c^2(\lambda^2 - 6\lambda^2 + 4)^2} \left[\frac{1}{2}(\lambda^2 + 1)^2 - \frac{c^2\lambda^2}{12} + \frac{(48 - c^2)\lambda^2}{18(c^2 + 48)} + 8\lambda^2 \ln \frac{c(\lambda^2 + 1)}{4\sqrt{6}(\lambda^2 - 1)} \right]. \quad (3.3)$$

При этом осевой изгибающий момент и окружная сила на отрезке $[0, \frac{1}{2}]$ в течение фазы 23 равны соответственно

$$m(\xi, \tau) = 1 - 2(\xi - \frac{1}{2})^2 \left[4(\xi + 1) + \frac{c^2\xi}{4} \right], \quad n(\xi, \tau) = -1, \quad (3.4)$$

откуда видно, что функция $m(\xi, \tau)$ при $0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}$ монотонно возрастает от минус единицы до единицы, т.к. здесь $0 < c < 4\sqrt{3}$.

4. Деформация оболочки при малых значениях параметров c и α

В данном случае имеет место следующее соотношение между параметрами c и α : $0 \leq \alpha < \varphi(c)$, $0 < c \leq 4\sqrt{3}$.

Фаза 3I. Механизм и параметры движения для этой фазы показаны на фиг. 2, при этом остаются в силе формулы (2.2), (2.4), (2.5) и (2.8). Однако в этом случае, в отличие от пунктов 2 и 3, фаза 3I заканчивается в момент времени τ_{21} , когда шарнир η_1 достигает заделки. Из условия $\eta_1(\tau_{21}) = 0$ и формулы (2.4) получаем, что τ_{21} является наименьшим неотрицательным корнем трансцендентного уравнения

$$\ln \frac{1 + \sqrt{1 - \sigma^2(\tau)}}{\sigma(\tau)} - 2\sqrt{1 - \sigma^2(\tau)} + \frac{\alpha c}{\sqrt{6}} = 0, \quad (4.1)$$

где $\sigma(\tau) = 1 - c^2\tau$.

Вводя обозначение $\sigma_{21} = 1 - c^2\tau_{21}$, для максимального прогиба в конце фазы 3I имеем формулу $\omega(\frac{1}{2}, \tau_{21}) = (1 - \sigma_{21}^2)/(2c^2)$.

Фаза 32. Для этой фазы механизм и параметры движения показаны на фиг. 4. Формулы для параметров движения здесь имеют вид

$$\eta_2(\tau) = \frac{2\sqrt{3}}{c} \sqrt{\frac{\sigma_{21}(3 - 2\sigma_{21}^2)}{1 - c^2\tau} - 1}, \quad \sigma(\tau) = 1 - c^2\tau.$$

Для момента времени τ_{32} окончания фазы 32 и максимального прогиба оболочки в этот момент времени имеем формулы $\tau_{32} = (1 - \sigma_{32}^2)/c^2$ и $\omega(\frac{1}{2}, \tau_{32}) = (1 - \sigma_{32}^2)/(2c^2)$, где $\sigma_{32} = 48\sigma_{21}(3 - 2\sigma_{21}^2)/(c^2 + 48)$.

Окружная сила в этой фазе движения во всем промежутке $(0, \frac{1}{2}]$ равна $n(\xi, \tau) = -1$, осевой изгибающий момент на отрезке $[\eta_2, \frac{1}{2}]$ равен $m(\xi, \tau) = 1$, а на отрезке $[0, \eta_2]$

$$m(\xi, \tau) = 1 - \frac{(\eta_2 - \xi)^2}{4\eta_2^3} [4(\xi + 2\eta_2) + c^2 \eta_2^2 \xi]. \quad (4.2)$$

Благодаря тому, что в данном случае $c \leq 4\sqrt{3}$, и здесь изгибающий момент не превышает предельного и функция $m(\xi, \tau)$ в (4.2) на отрезке $0 \leq \xi \leq \eta_2$ возрастает от минус единицы до единицы.

Ф а з а 33. На фиг. 5 показан механизм и параметр движения для этой фазы. При этом имеем

$$v(\tau) = -\frac{3}{2}(c^2 + 16)(\tau - \tau_{32}) + v_{32}.$$

Момент окончания движения и максимальный остаточный прогиб в этом случае равны соответственно

$$\tau_{33} = \frac{1}{c^2} \left[1 - \frac{(c^2 + 48)v_{32}}{3(c^2 + 16)} \right], \quad \psi\left(\frac{1}{2}, \tau_{33}\right) = \frac{1}{2c^2} \left[1 - \frac{(c^2 + 48)v_{32}}{3(c^2 + 16)} \right]. \quad (4.3)$$

Для этой фазы движения остаются в силе формулы (3.4) для осевого изгибающего момента и окружной силы на отрезке $[0, \frac{1}{2}]$.

5. Деформация оболочки при больших значениях параметра c и малых значениях параметра α

Данный случай имеет место для следующего соотношения между параметрами α и c : $0 \leq \alpha \leq \psi(c)$, $c > 4\sqrt{3}$.

В этом случае имеют место четыре фазы движения. Поскольку ход рассуждений, применяемый при анализе деформирования оболочки в этом случае, аналогичен соответствующим рассуждениям, приведённым выше, в целях краткости приведем здесь лишь описание механизмов движения и окончательные результаты.

Первые две фазы (ф а з ы 41 и 42) совпадают с фазами 31 и 32 соответственно. Однако в отличие от случая короткой оболочки при малых значениях параметра α фаза 42 заканчивается не в тот момент, когда шарнир η_2 достигнет середины оболочки, а в момент времени τ_{42} , когда производная по координате изгибающего момента в задатке $m'(0, \tau) = (12 - c^2 \eta_2^2)/(4\eta_2^3)$, уменьшаясь, достигнет нуля. В начале следующей фазы 43 у заделок появляются новые шарниры, которые начинают двигаться к середине оболочки (это явление встречалось в работах [1] и [4]), и эпюра скоростей прогибов снова имеет вид, показанный на фиг. 2. Фаза 43 заканчивается тем, что шарнир η_2 достигает середины оболочки, и в этот момент происходит смена механизма движения, показанный на фиг. 3. Фаза 44 для этой оболочки является последней фазой движения, и дальнейшее движение

му можно показать, что момент окончания движения τ_{4f} и максимальный остаточный прогиб здесь имеют следующий вид:

$$\tau_{4f} = \frac{1}{c^2} \left\{ 1 - \frac{2\mu}{[\mu^2(1+\sqrt{2})+1-\sqrt{2}]\sqrt{\beta}} \right\}, \quad (5.1)$$

$$\omega\left(\frac{1}{2}, \tau_{4f}\right) = \frac{1}{c^2} \left[\frac{1}{2} + \frac{2\mu^2}{\beta(\mu^2-6\mu^2+1)} + \frac{8\mu^2(\mu^2-1)^2}{\beta(\mu^2-6\mu^2+1)^2} \ln \frac{\mu^2+1}{(\mu^2-1)\sqrt{2}} \right]. \quad (5.2)$$

Здесь $\mu = (1+\sqrt{2}) \exp \frac{c-4\sqrt{3}}{2\sqrt{6}},$

а $\beta = 2 \cdot (1 - c^2 \tau_{4f})^2 [3 - 2(1 - c^2 \tau_{4f})^2]^{-2},$

где τ_{4f} - наименьший неотрицательный корень уравнения (4.1), т.е. момент окончания фазы 4I.

В данном случае, как и выше, окружная сила определяется по формуле $n(\xi, \tau) = -\Delta \rho \dot{\omega}(\xi, \tau)$, а нетривиальные выражения для осевого изгибающего момента для соответствующих фаз движения задаются формулами (2.8), (2.15) и (4.2).

6. Особый случай деформирования оболочки

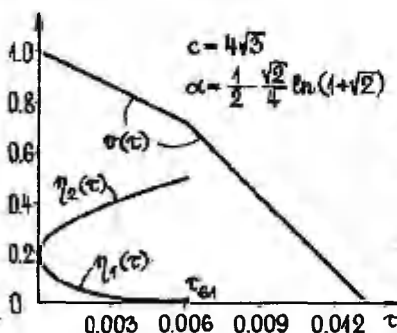
Под особым случаем понимается случай, когда между параметрами c и α имеется ещё не рассмотренная зависимость $\alpha = \varphi(c)$, $0 < c \leq 4\sqrt{3}$. Механизм и параметры движения в фазе 6I совпадают с механизмом движения и соответствующими параметрами движения начальных фаз при всех рассмотренных выше соотношениях между параметрами α и c и показаны на фиг. 2. Однако в данном случае начальная фаза 6I заканчивается в момент времени τ_{61} , когда одновременно шарнир η_1 достигает заделки, а шарнир η_2 - середины оболочки. Механизм движения в следующей и последней фазе 62 показан на фиг. 5. Формулы для момента окончания движения τ_{6f} и максимального остаточного прогиба в этом особом случае имеют вид

$$\tau_{6f} = \frac{1}{c^2} \left[1 - \frac{(c^2+48)\sqrt{96-c^2}}{12\sqrt{6}(c^2+16)} \right], \quad \omega\left(\frac{1}{2}, \tau_{6f}\right) = \frac{c^2+240}{5\sqrt{6}(c^2+16)}. \quad (6.1)$$

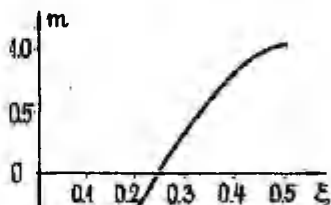
И здесь окружная сила определяется по формуле $n(\xi, \tau) = -\Delta \rho \dot{\omega}(\xi, \tau)$, а для нетривиальных случаев осевой изгибающий момент задаётся для фазы 6I формулой (2.8), а для фазы 62 - формулой (3.4).

7. Некоторые численные результаты и их обсуждение

Приведём сначала график, на котором показано поведение параметров движения для рассмотренного в пункте 6 особого случая деформирования оболочки, выбрав для параметров c и α следующие значения: $c = 4\sqrt{3} \approx 6,9282$ и $\alpha = \varphi(4\sqrt{3}) = \psi(4\sqrt{3}) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \ln(1+\sqrt{2}) \approx 0,1884$. Как следует из пункта 6, в этом случае движение происходит в двух фазах. Механизм движения и соответствующие параметры движения η_1 , η_2 и σ в фазе 6I показаны на фиг. 2, а механизм движения и соответствующий параметр движения σ в фазе 62 показаны на фиг. 5. Учитывая (2.2), (2.4) и (2.5) и тот факт, что непрерывная функция $\sigma(\tau)$ во время фазы 62 линейна и обращается в конце этой фазы в нуль, для выбранных значений параметров c и α приведём на фиг. 7 графики функций $\eta_1(\tau)$, $\eta_2(\tau)$ и $\sigma(\tau)$. Из фиг. 7 видно, что ускорение $\ddot{w}(\frac{1}{2}, \tau)$ в момент τ_{c1} окончания фазы 6I терпит разрыв. Учитывая (3.4), приведём на фиг. 8 также график осевого изгибающего момента во время фазы 62 (в течение этой фазы движение оболочки модальное и осевой изгибающий момент постоянен по времени).



Фиг. 7

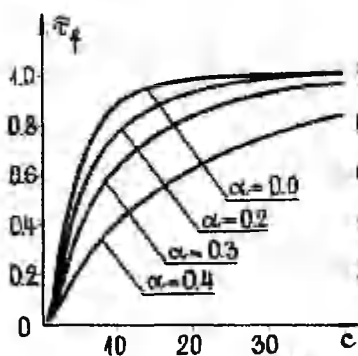


Фиг. 8

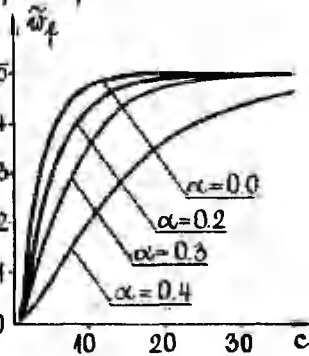
Графики для параметров движения и осевого изгибающего момента при других соотношениях между параметрами c и α здесь в целях краткости приводиться не будут.

Заметим теперь, что в соотношениях (1.4), связывающих между собой τ и t и соответственно ω и W , в выражениях для коэффициентов пропорциональности $\frac{E_0 l^2}{4\mu l^2 \sigma_0}$ и $\frac{E_0 k^2}{4\mu l^2 \sigma_0^2}$ при-

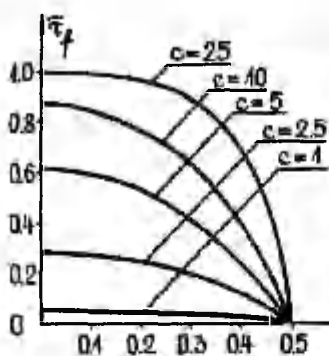
существует величина l . Поэтому задаваемые формулами (2.13), (2.14), (3.2), (3.3), (4.3), (5.1), (5.2) и (6.1) графики зависимостей $\tau_f = \tau_f(c)$ и $\omega_f = \omega_f(c)$, где τ_f - безразмерный момент окончания движения и $\omega_f = \omega(\frac{1}{2}, \tau_f)$ - безразмерный максимальный остаточный прогиб оболочки, при некотором значении параметра α не будут даже качественно описывать зависимости полного времени движения t_f и максимального остаточного прогиба W_f от длины l оболочки при постоянных значениях величин h, R и α . Характер зависимости величин t_f и W_f от длины l оболочки при постоянных значениях величин h, R и α мы получим, если введём в рассмотрение такое безразмерное время \bar{t} и такой безразмерный прогиб $\bar{\omega}$, что выражения для коэффициентов пропорциональности, связывающих \bar{t} с t и соответственно $\bar{\omega}$ с W , не содержат величины l . Это достигается, если безразмерное время \bar{t} связано с временем t по формуле $\bar{t} = c^2 \tau = \frac{\sigma_0 h}{\mu R v_0^2} t$ и безразмерный прогиб $\bar{\omega}$ связан с прогибом W по формуле $\bar{\omega} = c^2 \omega = \frac{\sigma_0 h}{\mu R v_0^2} W$, где в выражениях для коэффициентов пропорциональности $\frac{\sigma_0 h}{\mu R v_0^2}$ и $\frac{\sigma_0 h}{\mu R v_0^2}$ не входит величина l . Поэтому, учитывая формулы (2.13), (2.14), (3.2), (3.3), (4.3), (5.1), (5.2) и (6.1), по которым можно вычислить величины τ_f и ω_f при соответствующих значениях параметров c и α и которые имеют место для соответствующих соотношений между этими параметрами, приведём графики, показывающие зависимость величин $\bar{\tau}_f = c^2 \tau_f = \frac{\sigma_0 h}{\mu R v_0^2} t_f$ и $\bar{\omega}_f = c^2 \omega_f = \frac{\sigma_0 h}{\mu R v_0^2} W_f$ от параметров c и α . На фиг. 9 и фиг. 10 показаны зависимости соответственно величин $\bar{\tau}_f$ и $\bar{\omega}_f$ от параметра c при



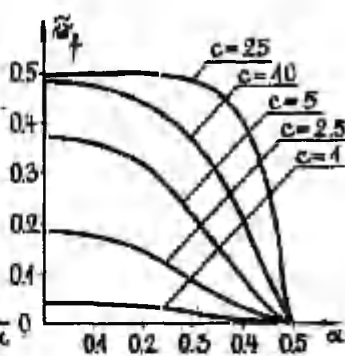
Фиг. 9



Фиг. 10



Фиг. 11



Фиг. 12

следующих значениях параметра α : 0; 0,2; 0,3; 0,4. На фиг. 11 и фиг. 12 показаны зависимости соответственно величин \bar{t}_f и \bar{w}_f от параметра α при следующих значениях параметра c : 1; 2,5; 5; 10; 25.

Учитывая вышесказанное, графики на фиг. 9-12 показывают характер зависимости величин t_f и w_f от длины l оболочки при постоянных значениях величин h , R и α , при этом с увеличением длины l оболочки при постоянных значениях величин h , R и α полное время движения и максимальный остаточный прогиб оболочки увеличиваются. Поскольку параметр α не входит в выражения для коэффициентов пропорциональности $\frac{E_0 h}{\mu R \sigma_0}$ и $\frac{E_0 h}{\mu R \sigma_0^2}$ в формулах, связывающих величины \bar{t} и t и соответственно \bar{w} и w , то графики на фиг. 9-12 показывают также характер зависимости величин t_f и w_f от параметра α при постоянном значении параметра c , при этом, как и следовало ожидать, с увеличением параметра α при постоянном значении параметра c полное время движения и максимальный остаточный прогиб оболочки уменьшаются и стремятся к нулю при $\alpha \rightarrow 0,5$.

Характер зависимости величин t_f и w_f от толщины h оболочки при постоянных значениях величин l , R и α (от радиуса R оболочки при постоянных значениях величин l , h и α) мы получим, если перейдем к такому безразмерному времени и такому безразмерному прогибу, что коэффициенты пропорциональности в зависимостях между этим безразмерным време-

нем и этим безразмерным прогибом от t и W соответственно не будут содержать величины h (величины R). Этот переход и соответствующие графики мы здесь в целях краткости приводить не будем. Отметим только, что при этом оказывается, как и следовало ожидать, что с увеличением толщины h оболочки при постоянных значениях величин ℓ, R и α полное время движения и максимальный остаточный прогиб оболочки уменьшаются, а при увеличении радиуса R оболочки при постоянных значениях величин ℓ, h и α величины t_f и W_f увеличиваются.

Отметим в заключение, что результаты данной работы в случае $\alpha = 0$ совпадают с результатами, приведёнными в статьях [3] и [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Леллеп Я., Оптимальное расположение дополнительной опоры для импульсно нагруженной пластической балки. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1979, 467, 52 - 57.
2. Лепик Ю., Определение оптимального положения опор для жёстко-пластической балки в случае импульсного нагружения. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1984, 675, 62 - 76.
3. Оленев Г., Деформация жёстко-пластической цилиндрической оболочки при импульсной нагрузке Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1982, 627, 57 - 65.
4. Оленев Г., Об оптимальном расположении дополнительной опоры к жёстко-пластической цилиндрической оболочке при импульсном нагружении. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1983, 659, 42 - 51.
5. Саймондс П., Динамика неупругих конструкций. М., "Мир", 1982.
6. Спорыхин А.Н., Хомяков Н.Д., О динамическом изгибе жёстко-пластической цилиндрической оболочки под действием распределённого давления. Сб. науч. тр. фак. прикл. мат. и мех. Воронежск. ун-та, 1971, I, 76 - 84.
7. Hodge P.G., Impact pressure loading of rigid-plastic cylindrical shells. J. Mech. and Phys. Solids, 1955, 3, № 3, 376 - 388.

Bending of a rigid-plastic cylindrical shell
under distributed impulsive loading

G. Olenev

Summary

A rigid-plastic cylindrical shell with clamped ends is considered. The shell is subjected to a prescribed initial velocity field, which is distributed on a central part, symmetrical with regard to the middle section of the shell. The material of the shell is assumed to obey the square yield condition.

Different regimes of motion are studied. Depending on the distribution of loading and the shell parameter $c^2 = 4\ell^2/kR$, where ℓ , h and R are the length, thickness and radius of the shell accordingly, there are two, three or four phases of motion of the shell. For each value of the shell parameter c^2 , and for each possible distribution of loading, the instant where the whole motion stops and the maximal residual deflection of the shell are presented.

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ШТРАФА К ЗАДАЧЕ ИЗГИБА УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ

Г. Оленев

Тартуский государственный университет

В данной работе рассматривается задача упругопластического изгиба статически нагруженной тонкой пологой оболочки при использовании закона пластичности Генки. Применяемый здесь подход аналогичен методу, предложенному в [4] при решении задачи изгиба упругопластической пластинки, и обобщает эту задачу на случай пологой оболочки. Задача, рассматриваемая в данной работе, формулируется в виде задачи минимизации квадратичного функционала на выпуклом замкнутом множестве, и исследуется возможность аппроксимации последней по методу штрафа. В работе показывается, что возникающая при этом квазилинейная эллиптическая система относительно перемещений имеет единственное решение. Данная задача рассматривалась также в [6].

Отметим, что задача упругопластического изгиба пластинки при предположении выполнимости закона пластичности Генки была предметом исследования также в работе [2], где эта задача сводилась к эквивалентному в определённом смысле вопросу нахождения седловой точки лагранжиана, для построения которой применялся алгоритм Удзавы. При помощи такого подхода эта задача была обобщена в [7] на случай упругопластической пологой оболочки.

1. Постановка задачи

Рассмотрим статически нагруженную упругопластическую пологую оболочку постоянной толщины h . Пусть $\mathcal{Q} = [0, a] \times [0, b]$, $(a, b > 0)$ — проекция на плоскость x_1, x_2 декартовой системы координат x_1, x_2, x_3 срединной поверхности оболочки, которая задаётся уравнением $z(x) = 0$, где $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{Q}$. Обозначим через \mathcal{Q}_h множество точек (x, x_3) , принадлежащих оболочке. Предположим, что $z_{,11}(x) = z_{,22}(x) = \kappa = \text{const}$ (здесь и далее через $\varphi_{, \alpha}$ обозначается частная производная функции φ по x_α). Пусть статическая внешняя нагрузка

имеет компоненты f_1, f_2, f_3 .

Уравнения равновесия пологой оболочки запишем в виде

$$N_{\alpha\beta,\beta} = -f_\alpha, \quad -\kappa N_{\alpha\alpha} + M_{\alpha\beta,\alpha\beta} = -f_3, \quad (I)$$

где усилия $N_{\alpha\beta}$ и изгибающие моменты $M_{\alpha\beta}$ выражаются через компоненты тензора напряжений σ_{ij} в виде

$$N_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} dx_3, \quad M_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} x_3 dx_3;$$

здесь и далее условимся считать, что индексы α, β принимают значения 1, 2, индексы i, j, κ, ℓ — значения 1, 2, 3, а по повторяющимся индексам производится суммирование.

Компоненты тензора деформаций, принимая гипотезы Кирхгофа-Лява, запишем в виде

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(u) = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) + \kappa \delta_{\alpha\beta} u_3 - x_3 u_{3,\alpha\beta}, \quad \varepsilon_{\alpha 3} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0, \quad (2)$$

где $u = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор перемещений точек срединной поверхности оболочки, а $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера.

Будем считать выполненными соотношения деформационной теории пластичности Генки (см., напр., [3]). Это означает, что:

$$1) F(\sigma) \leq 0, \quad \text{где } \sigma = (\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{22}, \sigma_{23}, \sigma_{33}),$$

а $F(\sigma)$ — заданная непрерывная выпуклая функция, соответствующая условию пластичности, напр., Треска или Мизеса;

2) связь деформаций с напряжениями задаётся соотношениями

$$\varepsilon_{ij}(u) = a_{ijkl} \sigma_{kl} + \lambda_{ij},$$

где $a_{ijkl} = a_{ijkl}(x_1, x_2, x_3)$ — коэффициенты упругости, удовлетворяющие условиям симметрии

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij} \quad (3)$$

и равномерной положительной определённости

$$a_{ijkl} \xi_{ij} \xi_{kl} \geq c_0 \xi_{ij} \xi_{ij}, \quad \forall \xi_{ij} \in \mathbb{R}, \quad c_0 = \text{const} > 0, \quad (4)$$

а λ_{ij} — пластические составляющие деформации, удовлетворяющие соотношениям

$$\lambda_{ij}(\tau_{ij} - \sigma_{ij}) \leq 0$$

для любого $\tau = (\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{22}, \tau_{23}, \tau_{33})$ такого, что $F(\tau) \leq 0$.

Предположим, что края оболочки жёстко заделаны по всему контуру, т.е.

$$u_1(x) = u_2(x) = u_3(x) = \frac{\partial u_3(x)}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma,$$

где Γ - граница области \mathcal{R} .

Введём гильбертово пространство напряжений

$$H = \{\sigma = \{\sigma_{ij}\} : \sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \sigma_{ij} \in L_2(\mathcal{R}_k)\}$$

со скалярным произведением

$$(\sigma, \tau)_H = \int_{\mathcal{R}_k} \sigma_{ij} \tau_{ij} dx_1 dx_2, \quad \sigma, \tau \in H.$$

и гильбертово пространство перемещений

$$V = \{\sigma = \{\sigma_i\} : \sigma_i \in W_2^{(2)}(\mathcal{R}), \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \frac{\partial \sigma_3}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma\}$$

со скалярным произведением

$$(u, v)_V = \int_{\mathcal{R}} (u_{\alpha, \beta} \sigma_{\alpha, \beta} + u_{3, \alpha \beta} \sigma_{3, \alpha \beta}) dx, \quad u, v \in V.$$

Определим выпуклое замкнутое в H множество

$$K = \{\sigma \in H : F(\sigma) \leq 0 \text{ почти всюду на } \mathcal{R}_k\}.$$

Предположим, что $f_i \in L_2(\mathcal{R})$, и введём аффинное множество M статически допустимых напряжений: $\sigma \in M$, если

$$\int_{\mathcal{R}_k} \sigma_{\alpha \beta} \epsilon_{\alpha \beta}(\sigma) dx_1 dx_2 = \int_{\mathcal{R}} f_i \sigma_i dx, \quad \forall \sigma \in V. \quad (5)$$

Заметим, что в случае достаточно гладких $\sigma_{\alpha \beta}$ из (5) вытекают уравнения равновесия (I).

Теперь сформулируем задачу упруго-идеально-пластического изгиба пологой оболочки с использованием закона пластичности Генки в следующем виде:

$$\begin{aligned} \text{найти } \sigma \in K \cap M, u \in V : \epsilon_{ij}(u) &= a_{ijkl} \sigma_{kl} + \lambda_{ij}, \\ \lambda_{ij}(\tau_{ij} - \sigma_{ij}) &\leq 0, \quad \forall \tau \in K. \end{aligned} \quad (6)$$

В дальнейшем предположим, что коэффициенты упругости

$$a_{ijkl} \in L_\infty(\mathcal{R}_k). \quad (7)$$

Вводя квадратичный функционал

$$J(\tau) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{R}_k} a_{ijkl} \tau_{ij} \tau_{kl} dx_1 dx_2, \quad \tau \in H,$$

по аналогии с [3] (стр. 245-246) можно показать, что если (σ, u) - решение задачи (6) и выполнены условия (3), (4) и (7), то σ минимизирует на $K \cap M$ функционал $J(\tau)$. Если потребовать ещё, что $K \cap M \neq \emptyset$, то существует единственное

$$\delta_0: J(\delta_0) = \min_{\delta \in K \cap M} J(\delta). \quad (6)$$

Отсюда следует, что в случае разрешимости задачи (6) отыскание напряжений в оболочке сводится к задаче минимизации (8).

2. О методе штрафа решения задачи (8)

Наряду с задачей (8) рассмотрим задачу:

$$\text{найти } \delta_\mu \in M: \Phi_\mu(\delta_\mu) = \min_{\delta \in M} \Phi_\mu(\delta), \quad (9)$$

где $\Phi_\mu(\delta) = J(\delta) + \frac{1}{2\mu} \|\delta - P\delta\|^2$, а P - оператор проектирования H на K .

Тогда согласно [4] задача (9) имеет единственное решение δ_μ для любого $\mu > 0$, при этом $\delta_\mu \xrightarrow[\mu \rightarrow 0]{H} \delta_0$, где δ_0 - решение задачи (8), если $M \cap K \neq \emptyset$, и δ_μ при $\mu \rightarrow 0$ стремится к элементу, минимизирующему $J(\delta)$ на множестве элементов из M , ближайших к K (это множество непусто, выпукло и замкнуто), если $M \cap K = \emptyset$ и K - ограничено в H . Заметим, что в случае, когда функция $F(\delta)$ соответствует условию пластичности Треска или Мизеса, множество K будет ограничено в H .

Опишем теперь способ построения δ_μ при $\mu > 0$. Для этого рассмотрим систему уравнений

$$\int_{\Sigma_h} \delta_{ij}(u_\mu) \varepsilon_{ij}(\eta) dx dx_3 + \int_{\Sigma} f_i \eta_i dx = 0, \quad \forall \eta \in V; u_\mu \in V, \quad (10)$$

где $\delta_{ij}(u_\mu)$ определяется соотношениями

$$\varepsilon_{ij}(u_\mu) = a_{ijkl} \delta_{kl}(u_\mu) + \frac{1}{\mu} (\delta(u_\mu) - P\delta(u_\mu))_{ij}. \quad (11)$$

Покажем, что задача (10)-(11) имеет единственное решение u_μ при любом $\mu > 0$, а δ_μ , определяемое по u_μ согласно (11), - решение задачи (9).

Для этого, следуя [4], вводится оператор $L_\mu: V \rightarrow V'$

$$\langle L_\mu(u), \eta \rangle = \int_{\Sigma_h} \delta_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(\eta) dx dx_3, \quad \forall \eta \in V, \\ \delta(u) = C_\mu^{-1} \varepsilon(u),$$

где $C_\mu \delta = A\delta + \frac{1}{\mu}(\delta - P\delta)$, $(A\delta)_{ij} = a_{ijkl} \delta_{kl}$ (как показано в [4], оператор C_μ^{-1} обратный к C_μ существует, сильно монотонен и липшиц - непрерывен), и доказывается, что L_μ сильно монотонен и непрерывен при любом $\mu > 0$. Отсюда по теореме

18.5 из [1] (стр. 273-274) следует, что уравнение $L_\mu(u) = -f$ (где $\langle f, \eta \rangle = \int_{\Omega} f_i \eta_i dx, \forall \eta \in V$) имеет единственное решение u_μ при любом $\mu > 0$, т.е. следует однозначная разрешимость задачи (I0)-(II). При этом, как показано в [4], $u_\mu = C_\mu^{-1} \varepsilon(u_\mu)$ является решением задачи (9).

Для проведения аналогично [4] доказательства сильной монотонности и непрерывности оператора L_μ при любом $\mu > 0$ достаточно проверить выполнимость неравенств

$$c \|u\|_V^2 \leq \int_{\Omega_h} \varepsilon_{\alpha\beta}(u) \varepsilon_{\alpha\beta}(u) dx dx_3 \leq C \|u\|_V^2, \quad \forall u \in V; c, C = \text{const} \quad (12)$$

Для доказательства этих неравенств, вводя обозначение

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(u) = \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}), \quad \text{заметим, что при } u \in V$$

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{\alpha\beta}(u) \varepsilon_{\alpha\beta}(u) dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [u_{\alpha,\beta} u_{\alpha,\beta} + (u_{\alpha,\alpha})^2] dx. \quad (13)$$

Действительно, пользуясь формулой интегрирования по частям, для $u_1, u_2 \in W_2^{(2)}(\Omega)$, $u_1 = u_2 = 0$ на Γ имеем

$$\int_{\Omega} u_{\alpha,\beta} u_{\beta,\alpha} dx = \int_{\Omega} (u_{\alpha,\alpha})^2 dx,$$

откуда, учитывая, что $\varepsilon_{\alpha\beta}(u) \varepsilon_{\alpha\beta}(u) = \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta} u_{\alpha,\beta} + u_{\alpha,\beta} u_{\beta,\alpha})$, получим (13) в случае, если $u \in V$.

Учитывая (2) и (13), теперь для $u \in V$ будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_h} \varepsilon_{\alpha\beta}(u) \varepsilon_{\alpha\beta}(u) dx dx_3 &= \frac{h}{2} \int_{\Omega} u_{\alpha,\beta} u_{\alpha,\beta} dx + \frac{h}{2} \int_{\Omega} (u_{\alpha,\alpha})^2 dx + \\ &+ 2k^2 h \int_{\Omega} u_3^2 dx + 2kh \int_{\Omega} u_{\alpha,\alpha} u_3 dx + \frac{h^3}{12} \int_{\Omega} u_{3,\alpha\beta} u_{3,\alpha\beta} dx. \end{aligned} \quad (14)$$

Отсюда, используя неравенство Коши-Буняковского и очевидное неравенство

$$\int_{\Omega} (u_{\alpha,\alpha})^2 dx \leq 2 \int_{\Omega} (u_{1,1}^2 + u_{2,2}^2) dx, \quad \text{для } u \in V \text{ получим}$$

$$\int_{\Omega_h} \varepsilon_{\alpha\beta}(u) \varepsilon_{\alpha\beta}(u) dx dx_3 \leq C_1 \int_{\Omega} (u_{\alpha,\beta} u_{\alpha,\beta} + u_3^2 + u_{3,\alpha\beta} u_{3,\alpha\beta}) dx, \quad (15)$$

$$\text{где } C_1 = \max \left\{ \frac{3}{2} h; 2\kappa^2 h; 2\sqrt{2} |\kappa| h; \frac{h^2}{12} \right\}.$$

Учитывая тот факт, что выражение

$$\left(\int_{\Omega} v_{,\alpha} v_{,\alpha} dx + \int_{\Gamma} r v^2 d\Gamma \right)^{1/2}$$

эквивалентно норме пространства $W_2^{(1)}(\Omega)$, если $v \in W_2^{(1)}(\Omega)$,

$$r \in L_{\infty}(\Gamma), r(x) \geq 0 \text{ и } \text{mes} \{x \in \Gamma : r(x) > 0\} > 0,$$

получим, что для $u_3 \in W_2^{(2)}(\Omega)$, $u_3 = \frac{\partial u_3}{\partial n} = 0$ на Γ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_{3,\alpha\beta} u_{3,\alpha\beta} dx &= \int_{\Omega} u_{3,1\alpha} u_{3,1\alpha} dx + \int_{\Gamma} r_1 u_{3,1}^2 d\Gamma + \\ &+ \int_{\Omega} u_{3,2\alpha} u_{3,2\alpha} dx + \int_{\Gamma} r_2 u_{3,2}^2 d\Gamma > c_1 \left[\int_{\Omega} (u_{3,\alpha\beta} u_{3,\alpha\beta} + u_{3,\alpha} u_{3,\alpha}) dx + \int_{\Gamma} u_3^2 d\Gamma \right] > \\ &> c_1 \int_{\Omega} u_{3,\alpha\beta} u_{3,\alpha\beta} dx + c_1 c_2 \int_{\Omega} (u_{3,\alpha} u_{3,\alpha} + u_3^2) dx > c_3 \int_{\Omega} (u_{3,\alpha\beta} u_{3,\alpha\beta} + u_3^2) dx, \end{aligned}$$

$$\text{где } r_{\alpha}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Gamma_{\alpha}, \\ 0, & x \in \Gamma \setminus \Gamma_{\alpha}, \end{cases} \quad \Gamma_1 = \{(0; y); (a; y): 0 \leq y \leq b\} \text{ и}$$

$$\Gamma_2 = \{(x; 0); (x; b): 0 \leq x \leq a\}, c_1, c_2 = \text{const} > 0, \text{ а } c_3 = \min \{c_1; c_1 c_2\}.$$

Отсюда и из (10) теперь будем иметь, что при $u \in V$

$$\int_{\Omega_h} \varepsilon_{\alpha\beta}(u) \varepsilon_{\alpha\beta}(u) dx dx_3 \leq C \|u\|_V^2,$$

$$\text{где } C = \max \{C_1; C_1/c_3\}.$$

$$\text{Наконец, неравенство } \int_{\Omega_h} \varepsilon_{\alpha\beta}(u) \varepsilon_{\alpha\beta}(u) dx dx_3 > c \|u\|_V^2$$

$$\text{для } u \in V \text{ с положительной постоянной } c = \min \left\{ \frac{1}{2}; \frac{h^2}{12} \right\}$$

следует из (14), если заметить, пользуясь неравенством Коши-Буняковского, что

$$\begin{aligned}
& \frac{h}{2} \int_{\mathbb{R}} (u_{\alpha,\alpha})^2 dx + 2k^2 h \int_{\mathbb{R}} u_3^2 dx + 2kh \int_{\mathbb{R}} u_{\alpha,\alpha} u_3 dx \geq \\
& > \frac{h}{2} \int_{\mathbb{R}} (u_{\alpha,\alpha})^2 dx - 2|k|h \left(\int_{\mathbb{R}} (u_{\alpha,\alpha})^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} u_3^2 dx \right)^{1/2} + 2k^2 h \int_{\mathbb{R}} u_3^2 dx = \\
& = \frac{h}{2} \left[\left(\int_{\mathbb{R}} (u_{\alpha,\alpha})^2 dx \right)^{1/2} - 2|k| \left(\int_{\mathbb{R}} u_3^2 dx \right)^{1/2} \right]^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, неравенства (I2) доказаны.

Для численного решения системы (I0)-(II) возможно использовать разностный метод, аналогичный методу, предложенному в [4], где при построении разностной схемы использовался метод сумматорных тождеств, а исследование сходимости решения полученной разностной схемы опиралось на технику внешних аппроксимаций [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайнберг М.М., Вариационный метод и метод монотонных операторов. М., "Наука", 1972.
2. Волошановская С.Н., Карчевский М.М., Об итерационных методах решения задач упруго-пластического изгиба пластин. В кн.: Численные методы и их применение. Казань, изд-во Казанского ун-та, 1983, 3-18.
3. Дюво Г., Лионс Ж.-Л., Неравенства в механике и физике. М., "Наука", 1980.
4. Карчевский М.М., О методе штрафа решения задач упруго-пластического изгиба пластин. В кн.: Сеточные методы решения задач математической физики. Казань, изд-во Казанского ун-та, 1984, 55-74.
5. Обэн Ж.-П., Приближённое решение эллиптических краевых задач. М., "Мир", 1977.
6. Сленев Г., О решении задачи изгиба упругопластической полой оболочки методом штрафа. В кн.: Тезисы докладов конференции "Методы алгебры и анализа". Тарту, 1988, 178-180.
7. Сленев Г., Применение алгоритма Удзава к решению задачи изгиба упругопластической полой оболочки. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1988, 799, 89-96.

On applying the penaltization to the problem
of elastic-plastic shallow shell bending

G.Olenev

Summary

The problem of elastic-plastic static bending of a thin shallow shell, under the Hencky plastic law, is reduced to the problem of minimization of quadratic functional on the convex closed set. A possibility of approximation of the latter problem, with the aid of penaltization, has been studied. The paper shows that the arising, with this, quasi-linear elliptic system with respect to displacements of the shell has a unique solution.

ПРОЕКТИРОВАНИЕ НЕПРЕРЫВНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ ДЛЯ
РАВНОПРОЧНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТРУБ С ПОДВИЖНЫМИ
ТОРЦАМИ И В УСЛОВИЯХ СТАЦИОНАРНОГО НАГРЕВА

Хейн К., Хейнлоо М.

Тартуский государственный университет

Задача проектирования непрерывной неоднородности для равнопрочных конструкций основывается на решении упругой задачи с определением распределения упругих свойств материала и величин нагрузок, гарантирующих выполнение наперед заданного условия пластичности впервые и сразу во всей конструкции. В работах [1 - 8] построен ряд точных аналитических [1-5, 7, 8] и численных [6, 7] решений рассматриваемой задачи применительно к сферическим сосудам [1], вращающимся [3, 5, 6 - 8] и неподвижным [4] дискам постоянной [3, 4] и переменной [5-8] толщин, а также к цилиндрическим трубам [2, 6] в случае условия пластичности Треска [1-5, 7, 8] или Мизеса [6, 7]. В этих работах задачу проектирования непрерывной неоднородности удалось расщепить на задачу определения статически допустимых предельных нагрузок, обеспечивающих выполнение принятого условия пластичности, и на задачу определения такого распределения модуля Юнга по радиусу, которое обеспечивает упругие деформации конструкции вплоть до предельных нагрузок.

В данной работе поставленная задача решается численно для цилиндрических труб с подвижными торцами и в условиях стационарного нагрева. На основании результатов расчетов построены графики зависимостей между предельными значениями нагрузок и графики распределения модуля Юнга по радиусу трубы.

1. Постановка задачи

Пусть длинная толстостенная цилиндрическая труба находится под воздействием внутреннего и внешнего давления и вращается с постоянной угловой скоростью вокруг своей оси в условиях стационарного нагрева.

Введем безразмерные величины

$$r = \frac{\rho}{b}, \quad E = \frac{E^0}{\sigma^0}, \quad \sigma_\theta = \frac{\sigma_\theta^0}{\sigma^0}, \quad \sigma_r = \frac{\sigma_r^0}{\sigma^0}, \quad \sigma_z = \frac{\sigma_z^0}{\sigma^0},$$

$$\alpha = \frac{a}{b}, \quad p_1 = \frac{p_1^0}{\sigma^0}, \quad p_2 = \frac{p_2^0}{\sigma^0}, \quad T = \frac{T^0}{T_*} - 1, \quad \omega = \frac{\gamma(\omega^0 b)^2}{\sigma^0},$$

$$T_1 = \frac{T_1^0}{T_*} - 1, \quad \eta = \eta^0 T_*, \quad \varepsilon_r, \quad \varepsilon_\theta, \quad \varepsilon_z, \quad \nu, \quad T_2 = \frac{T_2^0}{T_*} - 1,$$

где E , ν - модуль Юнга и коэффициент Пуассона, σ_r , σ_θ , σ_z - компоненты напряжений, a , b - внутренний и внешний радиусы, ρ ($a \leq \rho \leq b$) - текущий радиус, σ^0 - предел текучести, p_1 , p_2 - внутреннее и внешнее давления, ω^0 , γ - угловая скорость и плотность материала, T_1^0 , T_2^0 - температуры на внутренней и внешней полостях трубы, ε_r , ε_θ , ε_z - компоненты деформаций, T^0 - текущая температура, T_* - температура естественного состояния. Будем считать, что $E = E(r)$.

Напряжения σ_r и σ_θ в неоднородной трубе должны удовлетворять уравнению равновесия

$$\sigma_r' = \frac{1}{r}(\sigma_\theta - \sigma_r) - \omega r. \quad (1)$$

Здесь и далее штрих обозначает производную по r . Для деформаций ε_θ и ε_r справедливо следующее уравнение совместности:

$$\varepsilon_\theta - \varepsilon_r + r\varepsilon_\theta' = 0. \quad (2)$$

Согласно закону Гука имеем

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}[\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)] + \eta T, \quad (3)$$

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}[\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)] + \eta T, \quad (4)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_\theta + \sigma_r)] + \eta T, \quad (5)$$

а $T = T(r)$ определяется из уравнения теплопроводности и в случае стационарного температурного поля представляется в виде

$$T = T_2 + (T_1 - T_2)(\ln \alpha)^{-1} \ln r. \quad (6)$$

Для напряжения σ_r имеем граничные условия

$$\sigma_r(\alpha) = -p_1, \quad (7)$$

$$\sigma_r(1) = -p_2. \quad (8)$$

В зависимости от подвижности торцов трубы рассматриваются

следующие условия:

$$\varepsilon_z = 0 \quad (9)$$

- торцы трубы в направлении оси жестко закреплены,

$$\int_a^1 r \delta_z dr = 0 \quad (10)$$

- торцы трубы свободные и

$$2 \int_a^1 r \delta_z dr = p_1 a^2 - p_2 \quad (11)$$

- торцы трубы закрытые.

Поставим следующую задачу: найти распределение модуля Юнга по радиусу трубы и величины нагрузок, при достижении которых условие пластичности Мизеса

$$(\sigma_\theta - \sigma_r)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 = 2 \quad (12)$$

выполняется впервые и сразу во всей трубе.

2. Вывод разрешающей системы уравнений

Предположим, что

$$\varepsilon_z = C, \quad (13)$$

где константа C определяется из условий (9) - (11) в зависимости от того, какое из них рассматривается. Учитывая (13), из формулы (5) получим, что

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) + E(C - \eta T). \quad (14)$$

Пользуясь соотношением (14), представим условие (12) в виде

$$\alpha \sigma_\theta^2 + b \sigma_\theta + C = 0, \quad (15)$$

где

$$\alpha = 1 + \nu^2 - \nu,$$

$$b = (2\alpha - 3)\sigma_r + E(1 - 2\nu)(\eta T - C),$$

$$c = \alpha \sigma_r^2 + E[\sigma_r(1 - 2\nu)(\eta T - C) + E(C - \eta T)^2] - 4.$$

Разрешив (15) относительно σ_θ , получим

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2\alpha} (n - b), \quad (16)$$

где

$$n = \ell(b^2 - 4ac)^{\frac{1}{2}},$$

причем $\ell = \pm 1$. Исключив с помощью равенства (16) δ_θ из уравнения равновесия (1), получим

$$\delta_r' = \frac{1}{2ar}(n - b) - \frac{1}{r}\delta_r - \omega r. \quad (17)$$

В силу формул (3) и (4) уравнение совместности деформаций (2) представляется в виде

$$\frac{E'}{E} = \frac{\delta_\theta - \delta_r + r[(1-\nu)\delta_\theta' - \nu\delta_r' + \eta ET']}{r[(1-\nu)\delta_\theta - \nu\delta_r]} \quad (18)$$

Для производной δ_θ' из равенства (16) с помощью формулы (6) имеем

$$\delta_\theta' = \Delta E' + (r-1)\delta_r' + q, \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{n}(\eta T - C) \left[(1-2\nu) \left(\frac{b-n}{2a} - \delta_r \right) + 2E(\eta T - C) \right], \\ r &= \frac{2}{2an} (n - b - 2a\delta_r), \\ q &= \frac{\eta(T_1 - T_2)}{2anr \ln \alpha} [E(1-2\nu)(b - n - 2a\delta_r) - 4aE^2(\eta T - C)]. \end{aligned}$$

С учетом формул (6) и (19) уравнение (18) получит следующий вид:

$$\frac{E'}{E} = \frac{\delta_\theta - \delta_r + r(1-\nu)(q + r\delta_r') - r\delta_r' + \eta E(T_1 - T_2)(\ln \alpha)^{-1}}{r[(1-\nu)\delta_\theta - \nu\delta_r - E(1-\nu)\Delta]} \quad (20)$$

Разрешив систему из двух уравнений (17) и (20) относительно δ_r и E при граничных условиях (6) или (7) и

$$E(1) = E_2 \quad (21)$$

или

$$E(\alpha) = E_1, \quad (22)$$

получим решение поставленной задачи.

Отметим, что в работе (6) был рассчитан случай, когда $C = T = 0$. Тогда уравнение (17) не содержит модуля Юнга, и поэтому поставленная задача расщепляется, как и в работах [1-5, 7, 8], на задачу определения статически допустимых предельных нагрузок и на задачу определения распределения модуля Юнга.

При $C \neq 0$ или (и) $T \neq 0$ такое расщепление задачи неосуществимо.

3. Численное решение и результаты расчета

Для решения системы (16), (20) в данной работе используется метод Рунге-Кутты четвертого порядка с прямым или обратным шагами. При этом рассматривались следующие случаи.

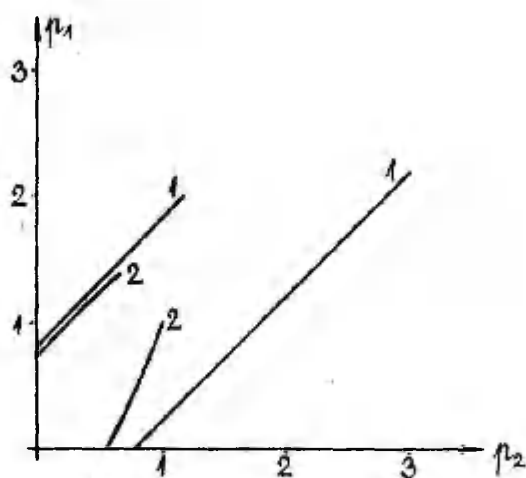
1. Заданы величины параметров μ_1, W, E_1, T_1, T_2 . Система (16), (20) решается прямым шагом с граничными условиями (7) и (22). Тогда граничные условия (8) и (22) дают значения параметров μ_2 и E_2 .

2. Заданы величины параметров μ_2, W, E_2, T_1, T_2 . Система (16), (20) решается обратным шагом с граничными условиями (8) и (22). В этом случае граничные условия (7) и (21) дают значения параметров μ_1 и E_1 .

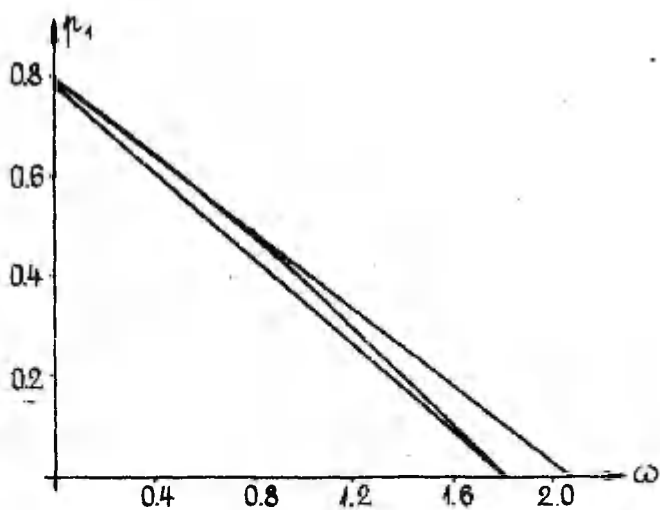
Если система (16), (20) решается при условиях (10) или (II), то константа C варьируется до тех пор, пока условия (10) или (II) не выполняются с заданной точностью.

Для иллюстрации результатов расчетов на фиг. 1 приведены графики зависимостей между предельными значениями параметров μ_1 и μ_2 при $\nu = 0.33, \alpha = 0.50, T_1 = T_2 = \omega = 0$. При этом кривая 1 подсчитана при условии (II) и кривая 2 - при условии (10). Из кривых 1 и 2 верхним соответствует $\ell = +4$ и нижним - $\ell = -4$. Заметим, что кривые 1 и 2 значительно отличаются от аналогичных кривых работы [6], подсчитанных при условии (9). На фиг. 2 приведены графики зависимостей между предельными значениями μ_1 и ω при $\nu = 0.33, \alpha = 0.50,$

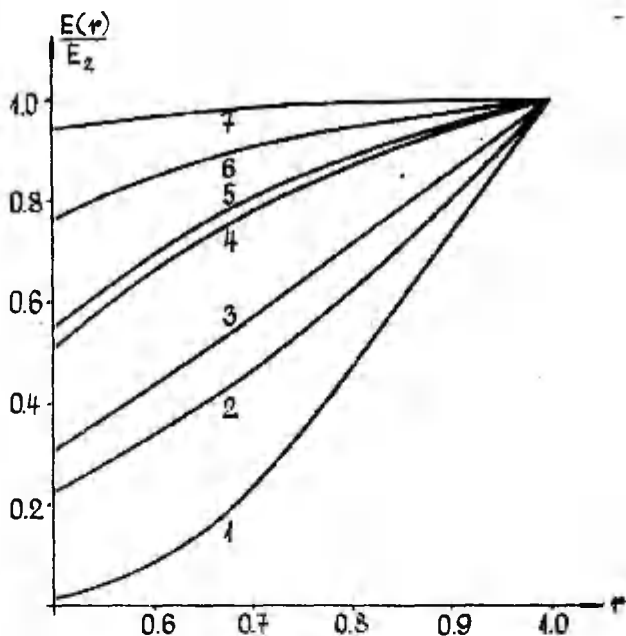
$T_1 = T_2 = \mu_2 = 0$. Кривые 1, 2, 3 подсчитаны при условиях (10), (II), (9) соответственно. На фиг. 3 представлены некоторые распределения модуля Юнга по радиусу трубы, которые обеспечивают упругие деформации трубы вплоть до предельных нагрузок. Кривые 1, 2, 3 рассчитаны при $\nu = 0.33, \alpha = 0.50$ при условии (II) и кривые 4-7 - при условии (10), причем на кривой 1 имеем $\mu_1 = 1.77, \mu_2 = 1.00, E_2 = 300, T_1 = T_2 = 0.00$, на кривой 2 - $\mu_1 = 0.00, \mu_2 = 0.79, T_1 = 1.00, T_2 = 0.40, E_1 = 200$, на кривой 3 - $\mu_1 = 0.00, \mu_2 = 0.79, T_1 = T_2 = 0.00, E_1 = 300$, на кривой 4 - $\mu_1 = 0.00, \mu_2 = 0.56, T_1 = T_2 = 0.00, E_1 = 300$, на кривой 5 - $\mu_1 = 0.00, \mu_2 = 0.56, T_1 = 1.00, T_2 = 0.40, E_1 = 200$, на кривой 6 - $\mu_1 = 0.30, \mu_2 = 0.78, T_1 = 1.00, T_2 = 0.40, E_1 = 200$ и на кривой 7 - $\mu_1 = 0.80, \mu_2 = 0.94, T_1 = T_2 = 0.00, E_1 = 300$. Кривые 2, 5, 6 рассчитаны при $\eta = 0.0014$.



Фиг. 1.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хейн К., Хейнлоо М., Оптимальная неоднородность сферического сосуда под давлением. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1985, 721, 43 - 51.
2. Хейн К., Хейнлоо М., Оптимизация непрерывной неоднородности цилиндрических труб под давлением. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1987, 772, 44 - 59.
3. Хейн К., Хейн М., Хейнлоо М., Оптимальная непрерывная неоднородность вращающегося диска в стационарном поле температуры. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1987, 772, 60-69.
4. Хейнлоо М.Л., Оптимизация свойств материалов круглых дисков, находящихся под воздействием давлений. Прикл. мех., 1987, 23, № 3, 83 - 89.
5. Хейн К.Э., Хейнлоо М.Л., Оптимизация неоднородности вращающихся дисков. В сб.: Механика неоднородных структур, т. II. Львов, 1987, 284 - 285.

6. Хейн К., Хейнлоо М., Автоматизированный расчет оптимальной непрерывной неоднородности цилиндрических труб и круглых дисков, равнопрочных относительно условия пластичности Мизеса. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1988, 799, 52 - 61.
7. Хейн К.Э., Хейнлоо М.Л., Оптимальная непрерывная неоднородность вращающегося диска переменной толщины в стационарном поле температуры. Ред. ж. "Пробл. прочности" АН УССР, Киев, 1988, 16 с. (деп. в ВИНТИ 06.04.88 г., № 2635-1388).
8. Хейн К.Э., Хейнлоо М.Л., Оптимальная непрерывная неоднородность вращающихся равнопрочных дисков, насаженных на жесткий вал. В сб.: Прикл. пробл. прочн. и пластичности. Анализ и оптимизация деформируемых систем. 1988, 61 - 67.

Design of continuous nonhomogeneity for equi-strength
cylindrical tubes with movable ends under steady
temperature field

K.Hein and M.Heinloo

Summary

The problem of optimal nonhomogeneity that guarantees satisfaction of the Von Mises yield criterion simultaneously at all points of cylindrical tubes is examined. The cylindrical tubes subjected to the external and internal pressures and rotating under steady temperature field are considered. Three cases depending on mobility of ends are investigated. The ends of the tubes are rigidly fixed, free or closed. The problem is solved numerically. The relations between the limit values of pressures and angular speed as well as the optimal Young's modulus distributions are presented.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СЖАТИИ ПЛАСТИЧЕСКОЙ СФЕРЫ

Я.Леллеп, А.Лаансоо

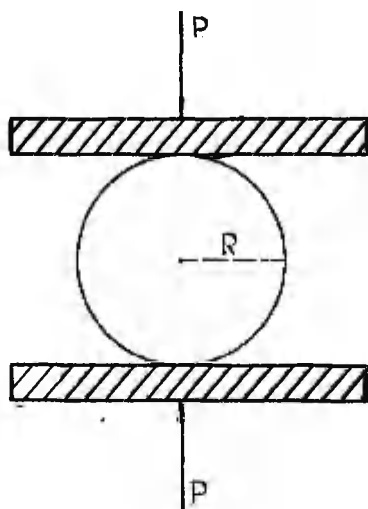
Тартуский государственный университет
Таллинский политехнический институт

Решение задач пластического деформирования тел является весьма сложным даже в случае, когда напряженно-деформированное состояние тела можно считать осесимметричным [1-6]. При исследовании деформирования порошковых материалов представляют интерес также сведения о деформационном процессе отдельных частиц. В связи с этим стала актуальной разработка приближенных оценок напряженно-деформированного состояния частиц материала при пластическом деформировании. Ниже предпринимается попытка определения компонентов напряжений и деформаций в пластической однородной сфере, сжатой между двумя жесткими плитами. Материал сферы идеально-пластический; упругими деформациями и упрочнением пренебрегается.

§ 1. Постановка задачи и основные уравнения

Рассмотрим полную однородную сферу радиуса R , которая сжимается двумя абсолютно жесткими пластинами силой P (фиг. 1). Допустим, что материал сферической частицы можно считать идеально жесткопластическим, имеющим предел текучести σ_0 (предел касательных напряжений обозначим через $\tau_0 = \sigma_0/\sqrt{3}$). Ограничимся исследованием малых пластических деформаций, при которых перемещения не превышают порядок половины радиуса. Требуется определить напряженно-деформированное состояние сжатого сферического тела, пренебрегая деформациями сжимающих пластин, а также упругими деформациями. Не учитываются также упрочнение материала и влияние массовых сил (собственного веса).

Считая напряженно-деформированное состояние сферы осесимметричным, будем использовать цилиндрическую систему координат $O r \theta z$. Отличные от нуля компоненты напряжений σ_r ,



Фиг. 1.

σ_r , σ_θ и $\tau = \tau_{rz} = \tau_{zr}$ должны удовлетворять уравнениям равновесия элемента сферы и соответствующим статическим краевым условиям. Уравнения равновесия в цилиндрической системе координат записываются в виде [2, 4, 7]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{\partial \tau}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\tau) &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Радиальная u и осевая w компоненты вектора скорости перемещения связаны с компонентами вектора скорости деформации ϵ_r , ϵ_θ , ϵ_z уравнениями

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}, & \epsilon_\theta &= \frac{u}{r}, & \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Материал сферы несжимаемый, поэтому

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (1.3)$$

Допустим, что материал сферы подчиняется условию пластичности Мизеса и ассоциированному закону течения. Условие Мизеса записывается в виде

$$\frac{1}{6}[(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2] + \tau^2 - \tau_0^2 \leq 0. \quad (1.4)$$

Согласно ассоциированному закону течения (закону градиентальности) имеем

$$\begin{aligned}\epsilon_r &= \lambda(\sigma_r - \bar{\sigma}), \\ \epsilon_\theta &= \lambda(\sigma_\theta - \bar{\sigma}), \\ \epsilon_z &= \lambda(\sigma_z - \bar{\sigma}), \\ \gamma &= 2\lambda\tau,\end{aligned}\tag{I.5}$$

где λ — некоторый неотрицательный скалярный множитель и $\bar{\sigma}$ — среднее нормальное напряжение, т.е.

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{3}(\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z).\tag{I.6}$$

В тех точках тела, где неравенство (I.4) превращается в строгое неравенство, множитель λ обращается в нуль [2]. С другой стороны, из (I.5) видно, что величину λ можно истолковать как коэффициент пропорциональности между тензором скорости деформации и девиатором напряжений. Поэтому в случае условия пластичности Мизеса и уравнений пластичности Генки-Ильюшина имеем

$$\lambda = \frac{G}{2\tau}.\tag{I.7}$$

Здесь через G обозначается интенсивность скоростей деформаций, т.е.

$$G = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\epsilon_r - \epsilon_\theta)^2 + (\epsilon_\theta - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_z - \epsilon_r)^2 + \frac{3}{2}\gamma^2}.\tag{I.8}$$

Для формулировки краевых условий на свободной части поверхности тела воспользуемся уравнениями

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \sigma_z \sin^2 \beta + \sigma_\theta \cos^2 \beta - \tau \sin 2\beta, \\ \tau_t &= \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_z) \sin 2\beta + \tau \cos 2\beta, \\ \sigma_t &= \sigma_z \cos^2 \beta + \sigma_r \sin^2 \beta + \tau \sin 2\beta,\end{aligned}\tag{I.9}$$

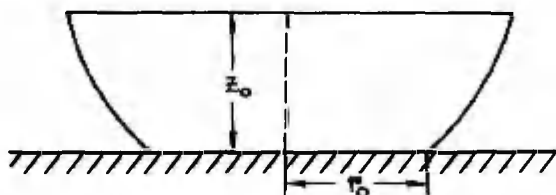
где β — угол между меридианом и осью Ox .

На контактной поверхности будем статическим краевым условиям удовлетворять в интегральном виде.

§ 2. Приближенное решение контактной задачи

Естественно предполагать, что экваториальная плоскость сферы остается параллельной жестким сжимающим пластинам

в течение процесса деформации. Кроме того, допустим, что напряженно-деформированные состояния в верхней и нижней частях сферы одинаковы (фиг. 1). Поэтому в дальнейшем рассмотрим лишь половину сферы (фиг. 2).



Фиг. 2.

Для решения поставленной задачи введем потенциальную функцию $\psi = \psi(r, z)$ таким образом, что скорости перемещений связаны с функцией ψ в виде

$$\begin{aligned} u &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \\ w &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

С помощью (2.1) можно проверить, что в таком случае условие нежимаемости (1.3) удовлетворяется тождественно.

Кинематические краевые условия сформулируем следующим образом:

$$w|_{z=0} = 0, \quad w|_{z=z_0} = -w_0, \quad u|_{r=0} = 0. \quad (2.2)$$

Статические краевые условия удовлетворяем интегрально, т.е. требуем, чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{aligned} 2\pi \int_0^R \delta_z|_{z=0} r dr &= -P, \\ 2\pi \int_0^{r_0} \delta_z|_{z=z_0} r dr &= -P. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь $z_0 = R - w_0$, а r_0 - радиус поверхности контакта. Следует отметить, что при решении конкретных практических задач в теории пластичности точные краевые условия заменяются

часто соответствующими интегральными требованиями [1,2,4,6].

Оказывается, что сформулированная задача существенно упрощается, если ввести следующую гипотезу. Полагаем, что течение материала в пластической зоне является плоским. Это означает, что компонента скорости w не зависит от r и, следовательно, $w = w(z)$. Это обстоятельство позволяет проинтегрировать второе уравнение в системе (2.1). В самом деле, из (2.1) находим

$$\frac{\partial w}{\partial r} = r w,$$

откуда после интегрирования по r получим

$$w = \frac{r^2}{2} \dot{w} + f(z), \quad (2.4)$$

где $f(z)$ — произвольная функция.

С помощью (2.4) из первого уравнения в системе (2.1) определяем

$$u = -\frac{1}{r} \left(\frac{r^2}{2} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{df}{dz} \right). \quad (2.5)$$

Так как на оси симметрии тела при $r=0$ согласно (2.2) $u=0$, то в (2.5) должно быть $df/dz=0$. Таким образом,

$$u = -\frac{r}{2} \dot{w}(z), \quad (2.6)$$

где штрихом обозначается дифференцирование по z .

С помощью (2.6) и (1.2) нетрудно проверить, что $\varepsilon_r = \varepsilon_\theta$, откуда с учетом (1.5) следует, что $\sigma_r = \sigma_\theta$. Геометрические соотношения (1.2) выражаются в виде

$$\varepsilon_r = -\frac{1}{2} \dot{w}', \quad \varepsilon_z = \dot{w}', \quad \gamma = -\frac{r}{2} \dot{w}'' \quad (2.7)$$

Определяя из (1.5) компоненты напряжений, с учетом (1.7), (1.8) получим

$$\sigma_r = \sigma_z = -\frac{\sqrt{3}}{6} \sigma_0 \dot{w}'; \quad (2.8)$$

$$\tau = -\frac{r \tau_0}{2G} \dot{w}''.$$

Отметим, что найденное распределение напряжений удовлетворяет тождественно условию Мизеса (1.4).

Подставляя в (I.8) соответствующие величины из (2.7) и пренебрегая в силу малости деформаций величинами высшего порядка малости, получим $\delta \approx -\sqrt{3} \varepsilon_z$. Допустим, что погрешность, связанная с отбрасыванием некоторых слагаемых в (I.8), невелика, и заменим в последнем соотношении знак приближенного равенства знаком равенства. Это позволяет записать формулы (2.8) в виде

$$\tau = r \tau_0, \quad \delta_r - \delta_z = \delta_0. \quad (2.9)$$

Здесь

$$\sigma(z) = \frac{\omega''}{\sqrt{12} \omega'} \quad (2.10)$$

Функцию σ определим так, чтобы были удовлетворены уравнения равновесия (I.I). С учетом равенства $\delta_r = \delta_0$ с помощью соотношения (2.9) запишем уравнения (I.I) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta_r}{\partial r} + r \tau_0 \sigma' &= 0, \\ \frac{\partial \delta_r}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_0 \sigma) &= 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Дифференцируя первое уравнение в (2.11) по z , второе — по r и приравняв между собой смешанные производные от δ_r , приходим к простому обыкновенному уравнению второго порядка $\sigma'' = 0$, откуда следует, что

$$\sigma = Az + B. \quad (2.12)$$

Постоянные интегрирования A и B определим из статических краевых условий (2.3). Заметим прежде всего, что согласно (2.9) удовлетворяется тождественно условие обращения в нуль касательного напряжения на оси симметрии (при $r = 0$). Однако касательное напряжение должно равняться нулю и на плоскости симметрии. Поэтому

$$\sigma|_{z=0} = 0. \quad (2.13)$$

С помощью (2.13) из (2.12) можно исключить одну постоянную интегрирования и функцию σ задать в форме

$$\sigma = Az. \quad (2.14)$$

Обратимся теперь к системе (2.11). Из второго уравнения находим

$$\frac{\partial \delta_r}{\partial z} = -2 \tau_0 \sigma. \quad (2.15)$$

Интегрируя уравнение (2.15) с учетом (2.14), приходим к соотношению

$$\delta_r = -A\tau_0 z^2 + F(r), \quad (2.16)$$

где $F(r)$ - произвольная функция аргумента r .

Поскольку напряжение δ_r в виде (2.16) должно удовлетворять и первому уравнению в (2.11), то функция F определяется в виде

$$F = -A\tau_0 \frac{r^2}{2} + C_1, \quad (2.17)$$

где C_1 - некоторая постоянная. Таким образом,

$$\delta_r = -A\tau_0 \left(z^2 + \frac{r^2}{2} \right) + C_1. \quad (2.18)$$

Для определения скоростей перемещений получим с помощью (2.10) и (2.14) следующее уравнение:

$$\omega'' = \sqrt{12} A \omega' z. \quad (2.19)$$

Интегрируя (2.19) с учетом краевых условий (2.2), находим

$$\begin{aligned} \omega' &= B e^{\sqrt{3} A z^2}, \\ \omega &= B \int_0^z e^{\sqrt{3} A z^2} dz, \end{aligned} \quad (2.20)$$

где

$$B = -\omega_0 \left(\int_0^{z_0} e^{\sqrt{3} A z^2} dz \right)^{-1}. \quad (2.21)$$

Радиальная скорость перемещения выражается согласно (2.6) и (2.20), (2.21) в виде

$$u = \frac{\omega_0 r}{2} \frac{e^{\sqrt{3} A z^2}}{\int_0^{z_0} e^{\sqrt{3} A z^2} dz}. \quad (2.22)$$

Неопределенными остались постоянные интегрирования A и C_1 . Эти величины можно вычислить из условий (2.3). Подставляя величину δ_r из (2.18) с учетом (2.9) в первое соотношение в (2.3) и выполняя требуемые выкладки, определим

$$C_1 = \delta_0 - \frac{2}{R^2} \eta + A\tau_0 \frac{R^2}{4}, \quad (2.23)$$

где $\mu = P/2\pi$. Аналогично из второго условия в (2.3) находим

$$A\tau_0 = \frac{2\mu(1 - \frac{r_0^2}{R^2})}{r_0^2 [\frac{z_0^2}{4} + \frac{1}{4}(r_0^2 - R^2)]} \quad (2.24)$$

В конечном счете можно компоненты напряжений выразить в виде

$$\begin{cases} \sigma_r = \sigma_0 - \frac{2\mu}{R^2} - \frac{2\mu(1 - \frac{r_0^2}{R^2})(\frac{z^2}{2} - \frac{R^2}{4})}{r_0^2 [\frac{z_0^2}{4} + \frac{1}{4}(r_0^2 - R^2)]}, \\ \sigma_z = \sigma_r - \sigma_0, \\ \tau = A\tau_0 z r. \end{cases} \quad (2.25)$$

Пока статические краевые условия не использовались на свободной части тела. Требуется равенства нулю касательных напряжений на свободной поверхности тела удовлетворим в каждой точке, краевые условия для нормальных напряжений — интегрально. Первое требование приводит с учетом (1.9) к уравнению

$$\frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_z) \sin 2\beta + \tau \cos 2\beta = 0, \quad (2.26)$$

откуда находим

$$\tan 2\beta = \frac{2\tau}{\sigma_z - \sigma_r}. \quad (2.27)$$

Считая $\tan^2 \beta$ малой величиной по сравнению с единицей, можем (2.27) заменить соотношением

$$\tan \beta = \frac{\tau}{\sigma_z - \sigma_r}. \quad (2.28)$$

Уравнение искривленного меридиана ищем в виде $r = r(z)$. Приравняв $dr/dz = \tan \beta$ в (2.28) и подставляя сюда компоненты напряжений с помощью (2.25), приходим к уравнению

$$\frac{dr}{dz} = -\frac{A}{\sqrt{3}} r z, \quad (2.29)$$

решением которого при краевом условии $r|_{z=z_0} = r_0$ является функция

$$r = r_0 \exp \left[\frac{A}{2\sqrt{3}} (z_0^2 - z^2) \right]. \quad (2.30)$$

Отметим, что уравнение меридиана можно найти и на основании соотношения (2.27), но в этом случае приходим к нелинейному уравнению, которое следовало бы интегрировать численно. Однако это весьма неудобно, так как величины z_0 , r_0 , ω_0 пока не известны.

Запишем, наконец, условие для нормальных напряжений на свободной поверхности в интегральной форме

$$\int_0^{z_0} (\sigma_z \sin^2 \beta + \sigma_r \cos^2 \beta - \tau \sin 2\beta) \Big|_{r=r(z)} dz = 0. \quad (2.31)$$

Здесь кривая $r = r(z)$ выбирается в виде (2.30). Вычисление интеграла в (2.31) существенно упрощается, если предположить, что $\sin \beta \approx dr/dz$; $\sin 2\beta \approx 2dr/dz$. В таком случае (2.31) примет вид

$$\int_0^{z_0} \left(\sigma_r - \sigma_0 \left(\frac{dr}{dz} \right)^2 - 2\tau \frac{dr}{dz} \right) \Big|_{r=r(z)} dz = 0. \quad (2.32)$$

Учитывая (2.25), (2.29), (2.30) и выполняя в (2.32) операцию интегрирования, приходим к сравнительно простому соотношению

$$\sigma_0 z_0 - A \tau_0 \left(\frac{R^2}{12} - r_0^2 \frac{R}{2} \right) - \frac{2\tau}{R} = 0. \quad (2.33)$$

Для определения величин r_0 , ω_0 , z_0 имеем равенство (2.33), к которому добавляем соотношения

$$\omega_0 = R - z_0; \quad r(z) \Big|_{z=0} - u(r(z), z) \Big|_{z=0} = R,$$

откуда с учетом (2.22) получим уравнение

$$r_0 e^{\frac{A}{2} z_0^2} \left(1 - \frac{\omega_0}{2} \left(\int_0^{z_0} e^{\sqrt{3} A z^2} dz \right)^2 \right) = R. \quad (2.34)$$

Из системы (2.33), (2.34) можно вычислить величины ω_0 и r_0 при заданной нагрузке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д., Мартынова Г.Н., К теории осесимметричного состояния идеально пластического материала. Ж. прикл. мех. и техн. физ., 1964, № 5, 102-108.
2. Ивлев Д.Д., Теория идеальной пластичности. М., "Наука", 1966.

3. Ивлев Д.Д., Мартынова Г.Н., Об условии полной пластичности для осесимметричного состояния. Ж. прикл.мех. и техн. физ., 1963, № 3, 102-104.
4. Качанов Л.М., Основы теории пластичности. М., "Наука", 1969.
5. Липпман Г., Теория главных траекторий при осесимметричной пластической деформации. Механика.Период.сб. пер. и обз. ин. статей, 1963, № 3, 155-167.
6. Степанский Л.Г., Унксов Е.П., О приближенном решении некоторых плоскодеформированных и осесимметричных пластических задач. Изв. АН СССР. Мех. и машиностр., 1961, № 1, 170-173.
7. Шевченко К.Н., Основы математических методов в теории обработки металлов давлением. М., "Высшая школа", 1970.

An approximate solution to the problem
of compression of a plastic sphere

J.Lellep, A.Laansoo

Summary

Elastic deformations of a solid sphere have been studied. The sphere is compressed between absolutely rigid plates. Material of the sphere is assumed to be ideally plastic with no work-hardening. Elastic deformations have been neglected. An approximate technique of determination of the stress-strain state of the sphere has been developed. The results should be used by evaluating plastic deformations in the porous materials.

ИЗГИБ УПРОЧНЯЮЩЕЙСЯ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

К.Кенк

Таллиннский политехнический институт

Первые работы по оптимальному проектированию неупругих конструкций при динамическом нагружении были посвящены рассмотрению идеально-пластических конструкций [1]. У таких конструкций остаточные прогибы могут оказаться значительными. Упрочнение материала конструкции уменьшает остаточный прогиб. В работах [2 - 4] выполнено оптимальное проектирование круговых пластин с учетом изотропного упрочнения материала. Известно однако [5], что материалы обычно не упрочняются изотропно и при деформировании возникает анизотропия. Возникновение анизотропии можно учесть моделью трансляционного упрочнения.

В настоящей работе, в целях дальнейшего применения разработанной методики к оптимальному проектированию, рассмотрен изгиб круговой пластины из линейно упрочняющегося материала с идеальным эффектом Баушингера. Учитывается упругое основание пластины.

1. Рассмотрим изгиб шарнирно опертой по внешнему контуру круговой пластины радиусом R и толщиной $2h$, нагруженной равномерным постоянным давлением p , которое начинает действовать в момент времени $t = 0$. Пластина имеет упругое основание с коэффициентом постели K .

Применяя цилиндрические координаты r, θ, z имеем следующее уравнение движения пластины 2, 6 :

$$\frac{\partial^2 \tau M_r}{\partial r^2} - \frac{\partial M_\theta}{\partial z} + p r - K W r = 2 h r \mu \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (I)$$

где

$$M_r = \int_{-h}^h \sigma_r z dz, \quad M_\theta = \int_{-h}^h \sigma_\theta z dz, \quad (2)$$

μ - плотность материала пластины, W - прогиб. Пренебрегаем упругими деформациями пластины, т.е. полные деформации пластины считаем равными её пластическим деформациям.

2. Пусть поверхность текучести материала пластины совпадает с поверхностью Мизеса и материал пластины обладает

идеальным эффектом Баушингера, т.е. имеет место чисто трансляционное упрочнение [5]. Тогда поверхность нагружения имеет вид

$$(s_{ij} - p_{ij})(s_{ij} - p_{ij}) = \frac{2}{3} \sigma_s^2, \quad (3)$$

где s_{ij} - девиатор напряжений, p_{ij} - девиатор ориентированных остаточных микронапряжений, определяющий положение центра поверхности нагружения, $\sigma_s = \text{const}$ - исходный предел текучести.

В случае линейно упрочняющегося материала можно принять [7]

$$p_{ij} = C \varepsilon_{ij}, \quad (4)$$

где $C = \text{const}$, ε_{ij} - девиатор пластических деформаций.

Применяя закон течения, ассоциированный с поверхностью (3), получим

$$\varepsilon_{ij} = \lambda \frac{\partial F}{\partial s_{ij}} = 2\lambda (s_{ij} - p_{ij}). \quad (5)$$

Интенсивность скорости пластического сдвига

$$\eta = \sqrt{2 \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}} = \sqrt{8 \lambda^2 (s_{ij} - p_{ij})(s_{ij} - p_{ij})}. \quad (6)$$

С учетом (3) будем иметь

$$\eta = \frac{4\lambda}{\sqrt{3}} \sigma_s, \quad (7)$$

и ассоциированный закон течения можно представить в виде

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\sqrt{3}\eta}{2\sigma_s} (s_{ij} - p_{ij}), \quad (8)$$

откуда

$$s_{ij} = p_{ij} + \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}\eta} \dot{\varepsilon}_{ij}$$

или

$$s_{ij} = C \varepsilon_{ij} + \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}\eta} \dot{\varepsilon}_{ij}. \quad (9)$$

3. Пусть радиальное перемещение точек пластины $u = 0$.

Тогда

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= z \alpha_z, & \alpha_z &= \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}, \\ \varepsilon_\theta &= z \alpha_\theta, & \alpha_\theta &= \frac{1}{z} \frac{\partial W}{\partial r}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\eta = 2 |z| \alpha$$

$$s_z = C \varepsilon_z + \frac{\sigma_z}{\sqrt{3} \alpha} \dot{\varepsilon}_z, \quad s_\theta = C \varepsilon_\theta + \frac{\sigma_\theta}{\sqrt{3} \alpha} \dot{\varepsilon}_\theta, \quad (\text{II})$$

где

$$\alpha = \sqrt{\dot{\varepsilon}_z^2 + \dot{\varepsilon}_\theta^2 + \dot{\varepsilon}_r \dot{\varepsilon}_\theta}. \quad (\text{I2})$$

Учитывая, что

$$s_z = \frac{2}{3} \sigma_z - \frac{1}{3} \sigma_\theta, \quad s_\theta = \frac{2}{3} \sigma_\theta - \frac{1}{3} \sigma_z,$$

получим

$$\begin{aligned} \sigma_z &= C z (2 \alpha_z + \alpha_\theta) + \frac{\sigma_s}{\sqrt{3} \alpha} (2 \alpha_z + \alpha_\theta) \operatorname{sign} z, \\ \sigma_\theta &= C z (2 \alpha_\theta + \alpha_z) + \frac{\sigma_s}{\sqrt{3} \alpha} (2 \alpha_\theta + \alpha_z) \operatorname{sign} z \end{aligned} \quad (\text{I3})$$

Учитывая (2), будем иметь

$$\begin{aligned} M_z &= \frac{2 h^3}{3} C (2 \alpha_z + \alpha_\theta) + \frac{h^2 \sigma_s}{\sqrt{3} \alpha} (2 \alpha_z + \alpha_\theta), \\ M_\theta &= \frac{2 h^3}{3} C (2 \alpha_\theta + \alpha_z) + \frac{h^2 \sigma_s}{\sqrt{3} \alpha} (2 \alpha_\theta + \alpha_z). \end{aligned} \quad (\text{I4})$$

Предположим, что приложенная нагрузка не приводит к разрушению пластины, тогда движение пластины в некоторый момент времени $t = t_1$ прекращается.

Переходим к безразмерным величинам

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{t}{t_1}, \quad w = \frac{W}{h}, \quad x = \frac{r}{R}, \quad c = \frac{C h^2}{\sigma_s R^2}, \\ k &= \frac{K R^2}{\sigma_s h}, \quad q = \frac{\sigma_s R^2}{\sigma_s h^2}, \quad p = \frac{M R^2}{\sigma_s t_1^2}, \quad m_1 = \frac{M_z}{\sigma_s h^2}, \\ m_2 &= \frac{M_\theta}{\sigma_s h^2}, \quad \alpha_1 = \frac{\alpha_z R^2}{h}, \quad \alpha_2 = \frac{\alpha_\theta R^2}{h}, \\ \dot{\alpha}_1 &= \frac{\partial \alpha_1}{\partial \tau} = \frac{R^2 t_1}{h} \dot{\alpha}_z, \quad \dot{\alpha}_2 = \frac{\partial \alpha_2}{\partial \tau} = \frac{R^2 t_1}{h} \dot{\alpha}_\theta, \\ \dot{\alpha} &= \sqrt{\dot{\alpha}_1^2 + \dot{\alpha}_2^2 + \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2}. \end{aligned} \quad (\text{I5})$$

Тогда уравнение (I) принимает вид

$$\frac{\partial^2 (x m_1)}{\partial x^2} - \frac{\partial m_2}{\partial x} + q x = 2 p x \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + k x w, \quad (\text{I6})$$

а из соотношения (I4) получим

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{2}{3} c (2 \alpha_1 + \alpha_2) + \frac{2 \dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2}{\sqrt{3} \dot{\alpha}}, \\ m_2 &= \frac{2}{3} c (2 \alpha_2 + \alpha_1) + \frac{2 \dot{\alpha}_2 + \dot{\alpha}_1}{\sqrt{3} \dot{\alpha}}. \end{aligned} \quad (\text{I7})$$

4. Рассмотрим приближенное решение задачи.

Применим метод модальных решений, т.е. ищем прогиб в виде

$$w = \varphi(\tau) f(x). \quad (\text{I8})$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \nu_1 &= -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \nu_2 = -\frac{1}{x} \frac{\partial f}{\partial x}, \\ \nu &= \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_1 \nu_2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Тогда уравнение (16) можно представить в виде

$$\frac{\partial^2(x m_1)}{\partial x^2} - \frac{\partial m_2}{\partial x} + q x = 2 \varphi x \varphi f + k x \varphi f, \quad (20)$$

а соотношения (17) дают

$$m_1 = \frac{2\nu_1 + \nu_2}{\sqrt{3}\nu} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \varphi x + 1 \right), \quad m_2 = \frac{2\nu_2 + \nu_1}{\sqrt{3}\nu} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \varphi x + 1 \right). \quad (21)$$

Из (21) нетрудно установить, что

$$m_2 = \frac{2\nu_2 + \nu_1}{2\nu_1 + \nu_2} m_1. \quad (22)$$

5. Будем искать функцию $f(x)$ в виде степенного ряда [4]

$$f(x) = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4. \quad (23)$$

Условия шарнирного опирания

$$m_1/x=1=0, \quad m_2/x=1=0$$

дают

$$6a_2 + 28a_4 = 0, \quad a_0 + a_2 + a_4 = 0$$

откуда

$$a_4 = -\frac{3}{14} a_2, \quad a_0 = -\frac{11}{14} a_2.$$

Функцию (23) можно теперь представить в виде

$$f(x) = \frac{a_2}{14} (14x^2 - 3x^4 - 11). \quad (24)$$

Из (19) и (21) будем иметь

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{2a_2}{7} (9x^2 - 7), \quad \nu_2 = \frac{2a_2}{7} (3x^2 - 7), \\ \nu &= \frac{2\sqrt{3}}{7} |a_2| \sqrt{39x^4 - 84x^2 + 49}, \\ m_1 &= 4a_2 \varphi (x^2 - 1) - \frac{\varphi(x^2 - 1)}{\sqrt{39x^4 - 84x^2 + 49}}, \\ m_2 &= \frac{11}{7} a_2 \varphi (5x^2 - 7) - \frac{5x^2 - 7}{\sqrt{39x^4 - 84x^2 + 49}}. \end{aligned} \quad (25)$$

Нетрудно убедиться, что уравнение (20) можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial m_1}{\partial x} + m_1 - m_2 \right) = -q x + (2\varphi \ddot{\varphi} + k\varphi) x f. \quad (26)$$

Интегрируя (26) по x , получим

$$x \frac{\partial m_1}{\partial x} + m_1 - m_2 = \frac{qx^2}{2} + (2\varphi \ddot{\varphi} + k\varphi) \frac{q_2}{2B} (7x^4 - x^6 - 11x^2) + C_1 \quad (27)$$

Учитывая краевое условие в центре

$$m_1/x=0 = m_2/x=0,$$

получим, что $C_1 = 0$.

Из (25) получим

$$m_1 - m_2 = \frac{8}{7} c a_2 \varphi x^2 - \frac{2x^2}{\sqrt{39x^4 - 84x^2 + 49}}. \quad (28)$$

С учетом (28) уравнение (27) приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_1}{\partial x} = & \frac{8}{7} c a_2 \varphi x + \frac{2x}{\sqrt{39x^4 - 84x^2 + 49}} - \\ & - \frac{qx}{2} + \frac{q_2}{2B} (2\varphi \ddot{\varphi} + k\varphi) (7x^3 - x^5 - 11x). \end{aligned} \quad (29)$$

Интегрируя (29) по x , получим

$$\begin{aligned} m_1 = & -\frac{4}{7} c a_2 \varphi x^2 + \frac{1}{\sqrt{39}} \ln [2\sqrt{39(39x^4 - 84x^2 + 49)} + 78x^2 - 84] - \\ & - \frac{qx^2}{2} + \frac{q_2}{2B} (2\varphi \ddot{\varphi} + k\varphi) \left(\frac{7x^4}{4} - \frac{x^6}{6} - \frac{11x^2}{2} \right) + C_2. \end{aligned} \quad (30)$$

Удовлетворяя условию, вытекающему из (25)

$$m_1/x=0 = -4 c a_2 \varphi + 1,$$

получим из (30)

$$-4 c a_2 \varphi + 1 = 0,197366 + C_2$$

откуда

$$C_2 = -4 c a_2 \varphi + 0,8026.$$

Учет краевого условия $m_1/x=1 = 0$ дает

$$-\frac{32}{7} c a_2 \varphi + 1,2759 - \frac{9}{4} - \frac{47 q_2}{12 \cdot 2B} (2\varphi \ddot{\varphi} + k\varphi) = 0. \quad (31)$$

Обозначим

$$\varphi = -a_2 \varphi. \quad (32)$$

Тогда для определения φ будем иметь уравнение

$$2\varphi \ddot{\varphi} + (32,68 c + k) \varphi = 1,787\varphi - 9,1077$$

или

$$\psi + \frac{k + 32,68c}{2\rho} \psi = \frac{1,787}{2\rho} q - \frac{9,1077}{2\rho} \quad (33)$$

Пластические деформации будут развиваться, если $q > 5,0966$.

Вводим обозначения

$$B = \frac{k + 32,68c}{2\rho} \quad (34)$$

$$D = \frac{1,787}{2\rho} q - \frac{9,1077}{2\rho} \quad (35)$$

Тогда решение уравнения (32) получим в виде

$$\psi = \frac{D}{B} (1 - \cos \sqrt{B} z) \quad (36)$$

С учетом (32), (24) и (18) получим

$$w = \frac{D}{14B} (1 - \cos \sqrt{B} z) (11 + 3x^4 - 14x^2).$$

Пластина остановится, если

$$\dot{w} = \frac{D}{141B} (11 + 3x^4 - 14x^2) \sin \sqrt{B} z = 0,$$

т.е.

$$\sqrt{B} z_1 = \pi.$$

Учитывая, что $z_1 = 1$, получим $B = \pi^2$. Теперь из (34) и (15) будем иметь

$$\frac{\frac{KR^2}{h} + 32,68 \frac{h^2 C}{R^2}}{2 \frac{11R^2}{z_1^2}} = \pi^2$$

или

$$t_1 = \pi R \sqrt{\frac{2,11}{\frac{KR^2}{h} + 32,68 \frac{h^2 C}{R^2}}}.$$

Максимальный прогиб в центре пластины

$$w_{\max} = \frac{11D}{7B} \quad (37)$$

6. Рассмотрим пластину, для которой $R = 2$ м, $h = 0,05$ м
 $\sigma_s = 2 \cdot 10^4$ Па, $K = 10^4 \frac{\text{Па}}{\text{м}}$, $C = 4 \cdot 10^5$ Па.

В этом случае из (37) получим

$$w_{\max} = \frac{11(1,787q - 9,1077)}{7(40 + 32,68 \cdot 0,00125)} \quad (38)$$

Пусть $q = 10$, т.е. $q \approx 2 q_{min}$, где $q_{min} = 5,0966$. Тогда из (38) получим $w_{max} = 0,344$ или $W_{max} = 0,0172$ м. Следует отметить, что полученное значение q_{min} меньше предельной нагрузки $q_* = 6,5$, приведенной в [8], и поэтому выполненный выше расчет дает несколько завышенное значение для W_{max} .

Литература

1. Лепик Д., Оптимальное проектирование неупругих конструкций в случае динамического нагружения. Таллинн, "Валгус", 1982.
2. Кирс Д., Кенк К., Об оптимальном проектировании круговых пластин. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1983, 659, 23-29.
3. Кенк К., Кирс Д., Оптимальное проектирование равномерно нагруженной круговой пластины. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1985, 721, 83-87.
4. Кирс Д., Оптимальная форма упрочняющейся круговой пластины при динамическом нагружении. Прикладные проблемы прочности и пластичности. Анализ и оптимизация деформируемых систем. Горький, 1988, 72-79.
5. Кенк К., К теории знакопеременного нагружения. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1981, 564, 63-70.
6. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С., Пластины и оболочки. М., "Наука", 1966.
7. Ишлинский А.Д., Общая теория пластичности с линейным упрочнением. Укр. матем. ж., 1954, 3.
8. Качанов Л.М., Основы теории пластичности. М., "Наука", 1969.

Bending of strainhardening circular plate resting on an elastic foundation.

K. Kenk

Summary

Bending of simply supported circular plate under constant uniformly distributed load is considered. The load is applied at the instant $t = 0$. The translation model of linear strainhardening in case of the Mises yield surface and the method of modal solutions are used.

ОПТИМИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИ НАГРУЖЕННЫХ УПРОЧНЯЮЩИХСЯ ПЛАСТИН В СЛУЧАЕ НЕКОТОРЫХ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ УСЛОВИЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

Ю. Кирс

Таллиннский политехнический институт

В работе [1] были изложены общие идеи оптимального проектирования свободно опертых круговых упрочняющихся пластин, нагруженных экспоненциально убывающей нагрузкой. В работе [2] дано полное решение оптимального проектирования круговой упрочняющейся пластины. При этом к пластине была приложена линейно убывающая нагрузка. В работе [3] двумя методами решена аналогичная задача для изотропно упрочняющихся круглых пластин, заделанных по краю.

Во всех упомянутых работах используется условие текучести Мизеса. В настоящей работе рассматривается задача оптимального проектирования шарнирно закрепленных круговых упрочняющихся пластин в случае условия пластичности Треска и кривой текучести в виде ромба. В последнем случае для краткости приведены только численные результаты.

I. Оптимизация круглой пластины с непрерывно изменяющейся толщиной в случае условия пластичности Треска

Рассмотрим круглую пластину, шарнирно закрепленную по краю. Пусть толщина её равна $2H$, а радиус — R . Пластина нагружена следующей равномерно распределенной динамической нагрузкой p :

$$p_0 (1 - \tau/\tau_1), \quad \text{если } 0 \leq \tau \leq \tau_1, \quad (I.I)$$

$$0, \quad \text{если } \tau_1 \leq \tau \leq \tau_k,$$

где τ — время, p_0 — константа.

На первом этапе движения пластина нагружена линейно убывающей нагрузкой (I.I), которая в момент $\tau = \tau_1$ становится равной нулю. Дальнейшее движение во время второго этапа

$\tau > \tau_1$, происходит по инерции до остановки в момент τ_k

В ряде случаев движение пластины может закончиться уже в первой фазе, т.е. при $0 \leq \tau \leq \tau_1$. Рассмотрим здесь случай, когда толщина пластины и её производная изменяются непрерывно. Требуется определить зависимость толщины $2H$ от радиальной координаты r так, чтобы остаточный прогиб в центре

был минимальным. Учитывать нужно и то, что заданы объем пластины V_0 и минимальная толщина H_0 (т.е. $H \geq H_0$).

Воспользуемся цилиндрическими координатами r, φ и z . Начало цилиндрической системы координат находится в центре пластины на срединной плоскости. Ось Oz направлена вниз. Обозначим $\sigma_r = \sigma_1$ и $\sigma_\varphi = \sigma_2$.

Пусть дано кусочно-линейное условие текучести

$$\sigma_2 = a \sigma_1 + b \sigma_s \operatorname{sign} z, \quad (I.2)$$

где σ_s — предел текучести материала пластины,

a и b — заданные константы. Мощность пластической деформации вычисляется по формуле

$$\dot{A}_p = \sigma_1 \dot{e}_1 + \sigma_2 \dot{e}_2, \quad (I.3)$$

где e_1 и e_2 — главные скорости пластической деформации.

Предположим, что пластические деформации малы и упругие деформации не учитываются. Кроме этого, пусть осевое перемещение $u = 0$. Поэтому

$$\dot{e}_1 = z \dot{\kappa}_1, \quad \dot{e}_2 = z \dot{\kappa}_2, \quad (I.4)$$

где главные кривизны κ_1 и κ_2 вычисляются по формулам

$$\kappa_1 = -\frac{\partial W}{\partial r^2}, \quad \kappa_2 = -\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r}.$$

Подставляя выражения (I.2) и (I.4) в формулу (I.3), находим

$$\dot{A}_p = \sigma_s z [\dot{\kappa}_1 + a \dot{\kappa}_2] + b z \dot{\kappa}_2 \operatorname{sign} z.$$

Определим функцию $G(r)$ так, что

$$\sigma_1 = G(r) \sigma_s \operatorname{sign} z. \quad (I.5)$$

Тогда скорость работы пластической деформации

$$\dot{A}_p = \sigma_s z [G(\dot{\kappa}_1 + a \dot{\kappa}_2) + b \dot{\kappa}_2] \operatorname{sign} z. \quad (I.6)$$

Предположим

$$A_p = \frac{T^2}{B \sigma_{s0}} + C_0, \quad (I.7)$$

где B - заданная константа материала, C_0 - постоянная вычисляемая из начальных условий, σ_{s0} - предел текучести материала в начальный момент времени, T - интенсивность касательных напряжений. Аналогичное условие было использовано в работах [1 - 3].

Так как $T = 1,077 \tau_{max}^*$, где τ_{max}^* - максимальное касательное напряжение, то приближенно $T \approx \tau_{max}^*$. Но $\tau_{max}^* = (\sigma_I - \sigma_{II})/2$, где $\sigma_I \approx \sigma_{II} \approx \sigma_{II}$, поэтому

$$T \approx \tau_{max}^* = \frac{\sigma_I}{2} \quad (I.8)$$

Из уравнения (I.7), учитывая условие (I.8), находим

$$dA_p = \frac{2T dt}{B \sigma_{s0}} = \frac{\sigma_I d\sigma_I}{2B \sigma_{s0}}. \quad (I.9)$$

Теперь зависимости (I.6) и (I.9) дают дифференциальное уравнение

$$\frac{\sigma_I d\sigma_I}{2B \sigma_{s0}} = \sigma_I z [G(\alpha_1 + \alpha \alpha_2) + b' \alpha_2] \operatorname{sign} z dt,$$

решением которого является функция

$$\sigma_I = \sigma_{s0} \{1 + 2Bz [G(\alpha_1 + \alpha \alpha_2) + b' \alpha_2] \operatorname{sign} z\} dt. \quad (I.10)$$

Формула (I.10) позволяет найти выражение для предельного пластического момента M_s , а именно:

$$M_s = \sigma_{s0} H^2 + \frac{4B}{3} \sigma_{s0} H^3 [G(\alpha_1 + \alpha \alpha_2) + b' \alpha_2]. \quad (I.11)$$

При решении задачи используем метод модальных решений, согласно которому предполагается, что прогиб представляется в виде

$$W = F_1(\tau) \cdot \varphi_2(\tau) \quad (I.12)$$

Переходим теперь к следующим безразмерным величинам:

$$\begin{aligned}
 h &= \frac{H}{H_0}, \quad \lambda = \frac{r}{R}, \quad t = \frac{\tau}{\tau_1}, \\
 w &= \frac{W}{H_0}, \quad m_{1,2} = \frac{M_{1,2}}{\sigma_{s0} H_0^2}, \quad m_s = \frac{M_s}{\sigma_{s0} H_0^2}, \\
 q &= \frac{PR^2}{\sigma_{s0} H_0^2}, \quad \chi_{1,2} = \frac{\chi_{1,2} R^2}{H_0 \varphi}, \quad V = \frac{V_0}{2\pi R^2 H_0}, \\
 \alpha &= \frac{4B H_0^2}{3R^2}, \quad k = \frac{\mu R^2}{\sigma_{s0} \tau_1},
 \end{aligned} \tag{I.13}$$

где μ — плотность материала, τ_1 — момент времени, когда линейно убывающая нагрузка становится равной нулю, α — параметр, характеризующий меру упрочнения, k — заданный параметр пластины, V_0 — заданный объем пластины, H_0 — минимальная толщина.

Теперь уравнение движения круглой пластины можно записать в виде

$$\frac{d^2}{dx^2} (x m_1) - \frac{dm_2}{dx} + qx = 2k h x \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{I.14}$$

где

$$q = q_0 (1 - t) - \tag{I.15}$$

безразмерная нагрузка и

$$w = \varphi(t) f(x) - \tag{I.16}$$

прогиб.

Из условия о заданности объема пластины вытекает равенство

$$V = 2 \int_0^1 x h dx. \tag{I.17}$$

Формуле (I.II) можно придать вид

$$m_s = h^2 \{ 1 + \alpha \varphi h [G(\chi_1 + a \chi_2) + b \chi_2] \}, \tag{I.18}$$

где безразмерные обобщенные кривизны γ_1 и γ_2 вычисляются по формулам

$$\gamma_1 = -\frac{d^2 f}{dx^2}, \quad \gamma_2 = -\frac{1}{x} \frac{\partial f}{\partial x}. \quad (\text{I.19})$$

К уравнениям (I.14) - (I.19) добавим еще зависимость

$$m_1 = G(x) \cdot m_2, \quad (\text{I.20})$$

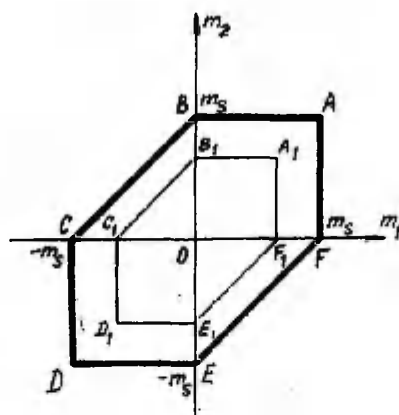
которая вытекает из условия (I.5). Предположим, что толщина $h(x)$ - полином 4-й степени, а именно:

$$h = h_0 + b_1 x^2 + b_2 x^4 \quad (\text{I.21})$$

где $h \gg 1$. Из уравнения (I.17) находим

$$h_0 = \sqrt{-\frac{b_1}{2} - \frac{b_2}{2}} \quad (\text{I.22})$$

Используя условие текучести Треска, рассмотрим пластическое течение в режиме АВ (фиг. I), поэтому $m_2 = m_3$, а в уравнениях (I.2) и (I.18) имеем $a = 0$ и $\bar{b} = 1$.



Фиг. I

Зависимость между безразмерными обобщенными кривизнами γ_1 и γ_2 должна быть задана, поэтому предполагаем, что

$$\gamma_1 = F(x) \gamma_2. \quad (\text{I.23})$$

При ассоциированном законе течения эта зависимость вытекает из условия перпендикулярности вектора скорости деформации \vec{E} к кривой текучести. Легко найти, что при этом имеем $f(x) = 1-x$, откуда следует, что $v_1 = 0$ и $v_2 = 1/2$. Получится противоречие (при $x \rightarrow 0$ имеем $m_3 \rightarrow \infty$). Поэтому здесь ассоциированный закон течения не имеет места. Следовательно, зависимость (I.23) нужно задать иначе. По существу, функция $F(x)$ определяет изменение угла между вектором скорости деформации \vec{E} и осью Ox . Идея метода представленного в данной работе, состоит в том, что с условием пластичности Треска используем выражение функции $F(x)$, полученное по эллипсу Мизеса. Конкретно это получается следующим образом: из уравнения $m_1^2 + m_2^2 - m_1 m_2 - m_3^2 = 0$ находим при помощи ассоциированного закона течения $v_1(2m_2 - m_1) = v_2(2m_1 - m_2)$. Имея теперь в виду, что $m_1 = G m_3$ и $v_1 = F v_2$, легко найти

$$F = \frac{2G-1}{2-G} \quad \text{или} \quad G = \frac{2F+1}{2+F}. \quad (\text{I.24})$$

Угол между вектором \vec{E} и осью Ox меняется непрерывно от значения $F=1$ при $x=0$ (так как там $v_1 = v_2$) до значения $F = -1/2$ при $x=1$ (так как здесь $v_1 = -v_2/2$). Теперь ясно, что функция $f(x)$ из формулы (I.16) должна удовлетворять следующим условиям: 1) $f(0) = 1$, 2) $f(1) = 0$, 3) $f'(0) = 0$, 4) $v_1(0) = v_2(0) \neq 0$, 5) $2v_1(1) = -v_2(1)$.

Предполагая, что $f(x)$ — полином третьей степени, находим однозначно

$$f = \frac{1}{3}(3 - 5x^2 + 2x^3), \quad (\text{I.25})$$

откуда $v_1 = 2(5-6x)/3$, $v_2 = 2(5-3x)/3$.

Уравнение движения пластины записываем теперь в виде

$$(x m_1)' = h^2 + x \psi h^2 \phi_1 - \frac{4x^2}{2} + 2k\psi \int h x f dx + C, \quad (\text{I.26})$$

где

$$\psi = \psi_0(1-\epsilon), \quad (\text{I.27})$$

$$\phi_1 = v_2(1+6F) = \frac{4(25-45x+21x^2)}{3(5-4x)}. \quad (\text{I.28})$$

В (I.26) и далее точка над переменной обозначает дифференцирование по безразмерному времени t , а запятая — по координате x . Уравнение (I.26) легко интегрируется. Константы интегрирования определим из условий 1) $m'(0) = 0$,

$$2) m_1(0) = h_0^2 (1 + 20 \alpha \varphi h_0/3).$$

На первом этапе движения пластины $0 \leq t \leq 1$ на пластинку действует нагрузка q по формуле (I.27). После решения уравнения (I.26) получим из условия $m_1(1) = 0$ дифференциальное уравнение

$$\ddot{\varphi} + A^2 \varphi = \frac{1}{2kA_1} [q_0(1-t) - 2A_3], \quad (\text{I.29})$$

где

$$0 \leq t \leq 1 \quad \text{и} \quad A = \frac{5}{2} \sqrt{\frac{\alpha A_2}{k A_1}}. \quad (\text{I.30})$$

$$A_1 = 0,63333h_0 + 0,13333b_1 + 0,048413b_2,$$

$$A_2 = 1,72236h_0^3 + 1,05356h_0^2b_1 + 0,51619(h_0b_1^2 + h_0^2b_2) + \\ + 0,110754b_1^3 + 0,664527h_0b_1b_2 + 0,243304(b_1^2b_2 + h_0b_2^2) + \\ + 0,191678b_1b_2^2 + 0,052723b_2^3,$$

$$A_3 = 3h_0^2 + 2h_0b_1 + \frac{6}{5}h_0b_2 + \frac{3}{5}b_1^2 + \frac{6}{5}b_1b_2 + \frac{b_2^2}{3}. \quad (\text{I.31})$$

Решением уравнения (I.29) является

$$\varphi = \frac{2q_0}{25\alpha A_2} [L(1 - \cos At) + \frac{t}{A} \sin At - t], \quad (\text{I.32})$$

где

$$L = 1 - 2A_3/q_0. \quad (\text{I.33})$$

Если движение закончится уже во время первой фазы ($t \leq 1$), то конечный момент времени вычисляется по формуле

$$t_k = \frac{2}{A} \arctan(AL), \quad (\text{I.34})$$

а выражение для минимизируемой функции — по формуле

$$F_m = \frac{2q_0}{25\alpha A_2} (2L - t_k), \quad (\text{I.35})$$

причем $t_k \leq 1$. Если же движение пластины продолжается во время второй фазы, когда $t > 1$ и $y_k = 0$, то после интегрирования уравнения (I.26) получим

$$\ddot{\varphi} + A^2 \varphi = - \frac{A_3}{\kappa A_1} \quad (\text{I.36})$$

откуда, удовлетворяя условиям непрерывности, легко найти функцию $\varphi(t)$.

После интегрирования находим

$$F_m = \frac{2g_0}{25\kappa A A_2} [AL(1 - \cos At_k) + \sin(A - At_k) - \sin At_k - A], \quad (\text{I.37})$$

где конечный момент времени движения пластины вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} & \frac{1}{A} \arctan A_4, \quad \text{если } A_4 > 0, \\ & \frac{1}{A} (\pi + \arctan A_4), \quad \text{если } A_4 < 0, \end{aligned} \quad (\text{I.38})$$

причем $t_k > 1$ и

$$A_4 = \frac{1 - \cos A}{\sin A - AL}. \quad (\text{I.39})$$

2. Оптимизация круглой пластины кусочно-постоянной толщины при условии пластичности Треска

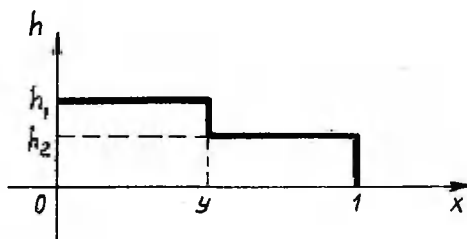
Рассмотрим теперь пластину, часть профиля которой изображена на фиг. 2. Здесь заданы как минимальная, так и максимальная толщина, поэтому $H_0 \leq H_{1,2} \leq H_m$, или в безразмерных величинах

$$1 \leq h_{1,2} \leq h_m. \quad (\text{2.1})$$

где $h_m = H_m/H_0$.

$$V = h_1 y^2 + (1 - y^2) h_2.$$

(2.2)



Фиг. 2

Исследования в данной работе показали, что возможны следующие два разных вида деформирования: первый вид - вся пластина находится в пластическом состоянии, второй вид - срединная часть остается жесткой. Исследуем сначала первый тип деформирования. Условие пластичности Треска связываем здесь с неассоциированным законом течения, как и в п. I. Используя метод модальных решений, определим функцию $f(x)$ по формуле (I.25). Решим уравнение (I.26), исходя из следующих предположений:

а) при $0 \leq x \leq y$ - имеем режим АВ (фиг. I), причем $h = h_1$, $m_z = m_{z1} = h_1^2 + x\psi h_1^3 \phi_1$;

в) при $y \leq x \leq 1$ - имеем режим A_IB_I, здесь $h = h_2$, $m_z = m_{z2} = h_2^2 + x\psi h_2^3 \phi_1$, где

ϕ_1 определяется равенством (I.28).

В первой фазе движения пластины ($t \leq 1$) получим

$$\ddot{\varphi} + A^2 \varphi = \frac{3q_0}{2kA_1} (L - 1) \quad (2.3)$$

где $L = 1 - \frac{6h_1^2}{q_0}$, $A = \frac{5}{4} \sqrt{\frac{3\alpha A_2}{kA_1}}$,

$$A_1 = 1,9h_2 + (V - h_2)(9 - 6y - 7,5y^2 + 8,4y^3 - 2y^4),$$

$$A_2 = 5,28h_2^3 + 1,609438h_1^2 + (h_1^3 - h_2^3)A_3,$$

$$A_3 = \frac{4(1-y)}{5-4y} + 12 - 13,44y + 6,72y^2 - \ln(5-4y). \quad (2.4)$$

Для вычисления конечного момента времени t_K получим опять формулу (I.34), а для минимизируемой функции теперь имеем

$$\bar{F}_M = \frac{8}{25} \cdot \frac{y_0}{\alpha A_2} (2L - t_K), \quad (2.5)$$

где $t_K \leq 1$. Если же движение продолжается в течение второй фазы, то получаемые выражения для функций t_K и \bar{F}_M аналогичны формулам (I.37), (I.38) и (I.39) с той разницей, что в уравнении (I.37) вместо коэффициента $2/25$ имеем $8/25$. Первый вид деформирования имеет место, если $m(y) \leq m_{s2}(y)$.

Рассмотрим кратко и второй вид деформирования.

а) Центральная часть $0 \leq x \leq y$ остается жесткой.

Здесь

$$f = 1, \quad h = h_1, \quad m_{s1} = h_1^2, \quad (2.6)$$

$$m_2 = m_{s2} = m_{s1} f + m_{s2} (1 - f);$$

в) при $y \leq x \leq 1$ можно использовать ассоциированный закон течения, так как точка $x=0$ (причина неприятностей) находится вне этого отрезка. Поэтому здесь $h = h_2$ и

$$f(x) = \frac{1-x}{1-y}, \quad m_2 = m_{s2} = h_2^2 \left[1 + \frac{x\psi h_2}{\alpha(1-y)} \right] \quad (2.7)$$

При $t_K \leq 1$ получим после необходимых вычислений

$$t_K = \frac{2}{A} \ln \frac{1}{1-y} (AL), \quad \bar{F}_M = \frac{y_0(1+y)}{\alpha A_2 A^2} (2L - t_K), \quad L = 1 - \frac{6h_2^2}{7y(1-y)}, \quad (2.8)$$

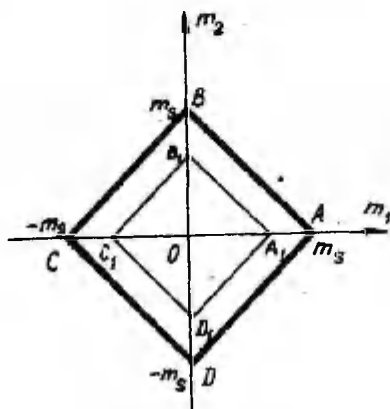
$$A = \frac{h_2}{1-y} - \sqrt{\frac{6\alpha h_2 (1-y)}{\alpha A_2}}, \quad A_2 = 4h_1 y^2 + h_2 (1-y)(1+3y).$$

При $t_K > 1$ получаются формулы, аналогичные равенствам (I.38) и (I.39). Минимизируемая функция \bar{F}_M определяется формулой (I.37), только выражение перед скобками приобретает здесь вид: $\frac{y_0}{\alpha A_2} (1 - \frac{6h_2^2}{7y(1-y)})$.

3. Численные примеры и анализ результатов

1) Пусть $V = 2$, $\kappa = 5$ и $\gamma_0 = 200$. Рассмотрим пластину, толщина которой $h(x)$ задается формулой (I.21). Используем при условии пластичности Треска формулы из п. I.

Аналогичные формулы получены и в случае кривой текучести в виде ромба (Фиг. 3). Для краткости в данной работе они не приводятся.

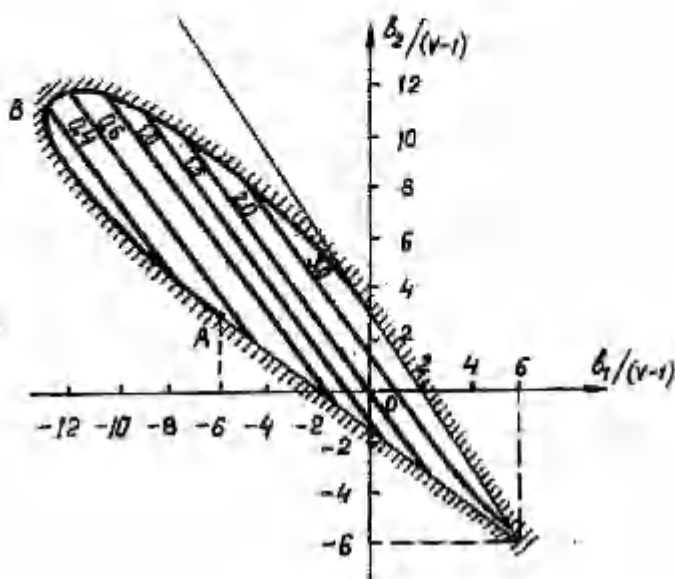


Фиг. 3

В этом случае в уравнении (I.2) $a = -1$ и $b = 1$. Получим также, что $\gamma_1 - \gamma_2 = 0$ и $f(x) = 1 - x^2$. Так как при всех значениях координаты x должно быть $h \geq 1$, получим после подробного анализа область определения решения задачи, изображенную на фиг. 4.

Более подробно эта фигура будет рассмотрена позже. Отметим здесь только, что аналогичная область дана в работе [2], где доказывается также, что оптимум получается на нижней границе области на дуге АВ. Такой же результат вытекает и в данном случае. Поэтому значение параметра b_1 при оптимуме однозначно определяет параметр b_2 , а именно:

$$b_2^{opt} = \frac{3}{2} \left[r - 1 - \frac{b_1}{2} - \sqrt{(r-1)^2 - b_1(r-1) - \frac{b_1^2}{12}} \right] \quad (3.1)$$



Фиг. 4

Вычисления были осуществлены на ЭВМ. Были вычислены значения функции t_k и F_M во всех точках (с данным шагом) и определены такие значения параметров b_1 и b_2 , которые обеспечивают минимум функции

В таблице I приведены результаты вычислений по формулам п.1 для малых значений параметра упрочнения α и в таблице 2 - при больших значениях параметра α . При этом $V=2$, $k=5$, $q_0=200$ и толщина задается формулой (1.21)

Таблица I

α	Кривая текучести в виде ромба			Условие пластичности Треска		
	b_1	F_M	t_k	b_1	F_M	t_k
0,2	-10,800	3,150	1,514	-11,50	0,568	0,667
0,4	-10,850	2,257	1,201	-11,54	0,344	0,513

0,6	-10,875	1,810	1,052	-11,55	0,249	0,434
0,8	-10,900	1,525	0,959	-11,56	0,197	0,384
1,9	-10,925	1,322	0,890	-11,57	0,163	0,349

Таблица 2

α	Кривая текучести в виде ромба			Условие пластичности Треска		
	b_1	F_M	t_K	b_1	F_M	t_K
1	-10,925	1,322	0,890	-11,57	0,163	0,349
2	-10,975	0,809	0,688	-11,58	0,089	0,256
3	-11,000	0,590	0,584	-11,59	0,061	0,212
4	-11,025	0,467	0,518	-11,59	0,047	0,185
5	-11,025	0,387	0,471	-11,59	0,038	0,167

Из таблицы 3 видно, как изменяются результаты, если изменяется начальная нагрузка q_0 . В этой таблице принято, что $V = 2$, $\kappa = 5$, $\alpha = 0,5$ и h определяется формулой (1.21).

Таблица 3

q_0	Кривая текучести в виде ромба			Условие пластичности Треска			
	b_1	F_M	t_K	q_0	b_1	F_M	t_K
40	-10,78	0,101	0,779	100	-11,46	0,061	0,409
80	-10,82	0,543	1,013	200	-11,55	0,289	0,469
120	-10,85	1,024	1,072	300	-11,57	0,521	0,479
160	-10,86	1,513	1,100	400	-11,58	0,754	0,483
200	-10,87	2,004	1,116	500	-11,59	0,987	0,486

Сравним полученные результаты (табл. 3) с результатами, вычисленными при условии Мизеса в работе [2]. Наиболее лучшее совпадение имеет место при условии пластичности Треска.

В случае кривой текучести в виде ромба слишком усиливается влияние нагрузки, но распределения толщины при этом отличаются немного. Результаты вычисления видны в таблице 4. В случае условия Мизеса при минимуме функции F_M параметр b_1 изменяется в промежутке $(-12,00; -11,90)$ [2].

Таблица 4

	Кривая текучести в виде ромба	Условие пластичности Треска	Условие пластичности Мизеса
	$b_1 = -10,975$ $b_2 = 7,6434$	$b_1 = -11,50$ $b_2 = 8,3007$	$b_1 = -11,93$ $b_2 = 8,6062$
x	Распределения толщины		
0	4,940	4,983	5,000
0,1	4,831	4,869	4,881
0,2	4,513	4,536	4,537
0,3	4,014	4,015	3,996
0,4	3,379	3,366	3,319
0,5	2,674	2,627	2,873
0,6	1,979	1,919	1,868
0,7	1,397	1,341	1,290
0,8	1,046	1,023	1,008
0,9	1,065	1,114	1,173
1,0	1,608	1,784	1,866

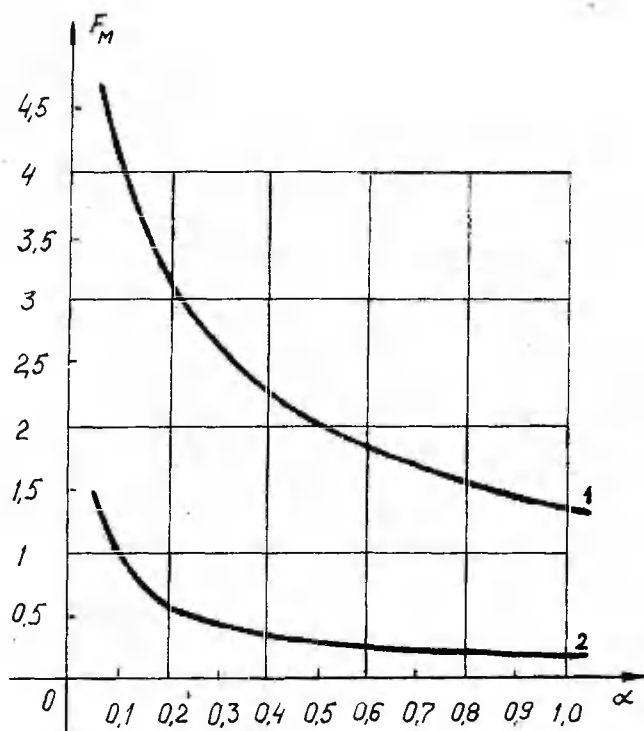
Как видно из таблиц I - 3, распределение ~~толщины пластины~~ (т.е. профиль) зависит как от параметра упрочнения α , так и от начальной нагрузки q_0 , но эта зависимость довольно слабая.

На фиг. 5 изображены графики зависимости остаточного прогиба в центре F_M от параметра упрочнения α . Верхняя кривая 1 соответствует условию текучести в виде ромба, нижняя 2 - условию текучести Треска.

На фиг. 4 изображены линии, вдоль которых остаточный прогиб в центре пластины имеет одно и то же значение (изобаты) при условии текучести Треска, если $V = 2$, $k = 5$, $\alpha = 0,5$ и $q_0 = 200$. Отметим, что аналогичная фигура при условии текучести Мизеса качественно совпадает с фиг. 4. Однако фиг. 6, соответствующая кривой текучести в виде ромба, сильно отличается от фиг. 4. На фиг. 6 имеем $V = 2$, $k = 5$, $\alpha = 0,5$, $q_0 = 50$.

2) Пусть $V = 2$, $k = 40$, $q_0 = 400$ и $\alpha = 1$.

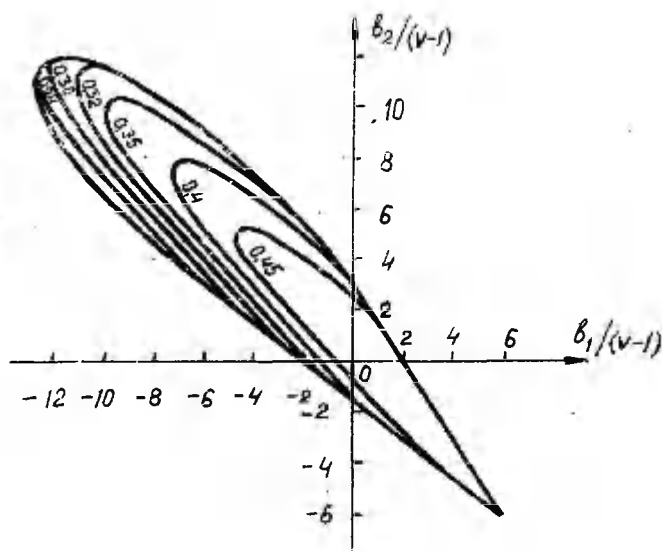
Расчеты для случая, когда толщина $h(x)$ - гладкая кривая, приведены в таблице 5.



Фиг. 5

Таблица 5

Условие	b_1	b_2	F_M	t_k
кривая текучести в виде ромба	-10,82	7,460	1,1384	1,9024
условие пластич- ности Треска	-11,52	8,327	0,2687	0,8331
условие пластич- ности Мизеса	-11,95	8,926	0,0464	0,5039



Фиг. 6

3) Рассмотрим теперь пластины кусочно-постоянной толщины (фиг.2). Пусть $V = 1,5$, $\kappa = 5$, $\varphi_0 = 200$ и $h_n = h_{min} = 1,8$. Вычисления были сделаны по формулам в п.2 (условие текучести Треска) и по аналогичным формулам при условии текучести в виде ромба. Как выяснилось, при оптимуме имеем всегда $h_1 = h_{min}$. В таблице 6 приведены результаты вычислений, если изменяется параметр упрочнения α , при этом $V = 1,5$, $\kappa = 5$, $\varphi_0 = 200$, $h_1 = 1,8$.

Таблица 6

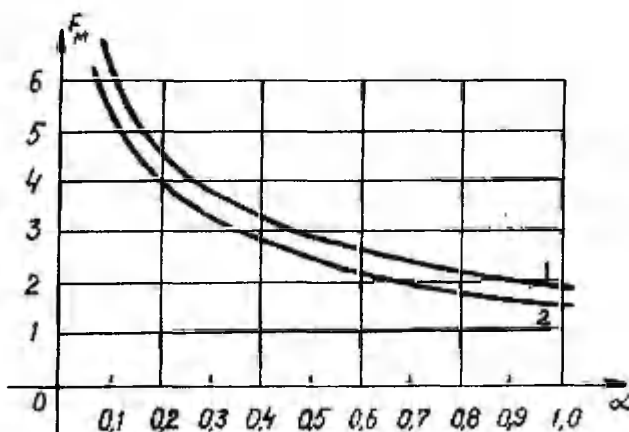
α	Кривая текучести в виде ромба				Условие пластичности Треска			
	y	h_L	F_M	t_K	y	h_L	F_M	t_K
0,2	0,764	1,0794	4,090	1,396	0,76	1,090	4,638	1,549
0,5	0,764	1,0794	2,553	1,036	0,76	1,090	2,913	1,131
1	0,763	1,0820	1,645	0,821	0,76	1,090	1,912	0,898
2	0,762	1,0846	0,987	0,629	0,75	1,114	1,165	0,692
3	0,762	1,0846	0,714	0,532	0,75	1,114	0,848	0,587
4	0,762	1,0846	0,562	0,471	0,75	1,114	0,670	0,520

В таблице 7, где $V = 1,5$, $K = 5$, $\alpha = 0,5$, $h_1 = 1,8$, показаны результаты вычислений в случае, когда меняется начальная нагрузка q_0 . Как видно из таблиц 6 и 7, проектируемые пластины получаются почти одинаковыми. Разница в результатах конечного прогиба также довольно маленькая.

Таблица 7

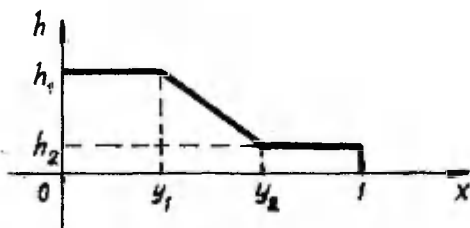
q_0	Кривая текучести в виде ромба				Условие пластичности Треска			
	y	h_L	F_M	t_K	y	h_L	F_M	t_K
50	0,734	1,1496	0,2367	0,813	0,738	1,1412	0,3722	0,961
100	0,754	1,1047	0,9861	0,976	0,751	1,1119	1,2036	1,075
200	0,764	1,0794	2,5527	1,036	0,759	1,0923	2,9134	1,131
300	0,767	1,0713	4,1295	1,054	0,759	1,0923	4,6313	1,147
400	0,768	1,0686	5,7085	1,063	0,760	1,0898	6,3514	1,155

На фиг. 7 видна зависимость конечного прогиба F_M от параметра упрочнения α . Верхняя кривая (1) соответствует условию текучести Треска, нижняя (2) - кривой текучести в виде ромба.



Фиг. 7

4) Задача была решена и для пластины, профиль которой соответствует фиг. 8.



Фиг. 8

При этом было использовано условие текучести Треска с неассоциированным законом течения. Для толщины пластины были заданы как минимальная, так и максимальная границы. Результаты вычислений показали, что оптимальный проект (минимум конечного прогиба в центре - F_M) достигается в случае, когда величина параметра y_2 приближается к величине параметра y_1 .

Например, при $V = 1,5$, $\kappa = 5$, $q_0 = 200$, $h_1 = h_{max} = 1,8$ получим: а) $\alpha = 0,2$, то $y_1 = 0,766$, $y_2 = 0,767$ (шаг по оси Ox был $0,001$), $h_2 = 1,0727$; в) при $\alpha = 2$ имеем $y_1 = 0,758$, $y_2 = 0,759$, $h_2 = 1,0936$.

Таким образом, можно сказать, что использование кусочно-линейных условий пластичности оправдывается. Оптимальные проекты пластин получаются почти такие же, что и при условии Мизеса. При учете конечных прогибов следует дать явное предпочтение условию пластичности Треска с неассоциированным законом течения перед кривой текучести в виде ромба. При исследовании пластин кусочно-постоянной толщины кривые текучести в виде ромба и Треска дают близкие оптимальные проекты.

Литература

1. Кирс Д., Кенк К., Оптимальное проектирование равномерно нагруженной круговой пластины. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1985, 721, 83-87.
2. Кирс Д., Оптимальная форма упрочняющейся круговой пластины при динамическом нагружении. Прикладные проблемы прочности и пластичности. Горький, 1988, 72-79.
3. Кирс Д., Оптимальное проектирование круговых упрочняющихся пластин, заделанных по краю. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1988, 799, 97-120.

Optimal design of dynamically loaded circular plates, considering the hardening of material and piece wise linear yield curves

J. Kirs

Summary

Optimal design of simply supported circular plates made of isotropically hardening material is examined in this paper. The plate is under the monotonously decreasing normal pressure. The purpose is to determine such a function of thickness for which the normal deformations in the centre of the plate, at the moment when the movement of the plate has stopped, were as small as possible. The problem is solved using two different yield curves - Tresca - criterion and rhomb - criterion. Both are approximate ones. In the § 1 the plates of continuously changing thickness are investigated. In the § 2 the stepped plates are considered. In this case thickness of the plate is limited.

Numerical results are presented.

МЕТОД ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К РАСЧЕТУ СОСТАВНЫХ ОБОЛОЧЕК

Г. Арясов, А. Смитко, Е. Соколов
Таллиннский политехнический институт

Частный случай метода дополнительных частных решений был рассмотрен в работе авторов [3], где исследовались осесимметричные деформации круговой цилиндрической оболочки, содержащей несколько участков различной жесткости.

Рассмотрим более общую трактовку данного метода, предполагая, что форма срединной поверхности элементов составной оболочки может иметь произвольный вид. Важно лишь, чтобы все частные решения, определяющие общие решения для каждого элемента оболочки, были известны.

Предположим, что оболочка содержит N различных участков. Тогда однородное дифференциальное уравнение такой оболочки может быть записано в виде

$$\sum_{i=1}^N [\eta(x-a_{i-1}) - \eta(x-a_i)] \hat{h}_i^{(n)}(x) = 0, \quad (I)$$

где $\eta(x-a_{i-1})$ и $\eta(x-a_i)$ - единичные функции, определяющие границы i -го участка оболочки;

$$\eta(x-a_0) = 1, \quad \eta(x-a_n) = 0;$$

$\hat{h}_i^{(n)}(x)$ - дифференциальный оператор n -го порядка с коэффициентами, представляющими собой гладкие функции, зависящий от формы срединной поверхности i -го участка оболочки;

a_i - абсциссы точек сопряжения соседних участков оболочки. Уравнение (I) представляет собой формально записанное объединение однородных дифференциальных уравнений всех элементов рассматриваемой составной оболочки.

Вместо уравнения (I) рассмотрим следующее вспомогательное неоднородное дифференциальное уравнение:

$$\sum_{i=1}^N [\eta(x-a_{i-1}) - \eta(x-a_i)] \hat{h}_i^{(n)}(x) = \sum_{j=1}^N \sum_{s=1}^N D_{ij}(a_i) \delta^{(j-1)}(x-a_i), \quad (2)$$

где $\delta^{(j-1)}(x-a_i)$ - производные $(j-1)$ -го порядка от дельта-функции,

$D_{ij}(a_i)$ - некоторые коэффициенты, способ определения которых будет указан ниже.

Будем разыскивать решение дифференциального уравнения (2) в такой форме:

$$\bar{y}(x) = \sum_{i=1}^N [\eta(x - \alpha_{i-1}) - \eta(x - \alpha_i)] \cdot \bar{y}_i(x), \quad (3)$$

где $\bar{y}(x) = \sum_{j=1}^n C_j \bar{y}_j(x)$ - общее решение однородного дифференциального уравнения, соответствующего i -му участку оболочки,

C_j - произвольные постоянные, одинаковые для всех элементов оболочки.

Следует также отметить, что при действии на i -ые элементы какой-либо внешней нагрузки она должна быть учтена с помощью соответствующего частного решения и прибавлена к $\bar{y}_i(x)$, входящему в формулу (3).

Подставляя $\bar{y}(x)$ в левую часть уравнения (2), получим в ней два типа слагаемых: первые содержат единичные функции, а вторые - дельта-функции и их производные до $(n-1)$ -го порядка включительно. При этом, так как каждая из функций $\bar{y}_i(x)$ есть общее решение дифференциального уравнения, соответствующего i -му участку оболочки, то все коэффициенты при соответствующих единичных функциях дают в сумме нуль.

Если теперь сравнить коэффициенты, стоящие при дельта-функции и её производных в левой и правой частях уравнения (2), можно определить все коэффициенты $D_{ij}(\alpha_i)$ вспомогательного уравнения (2).

Отсюда следует, что общее решение однородного дифференциального уравнения (1) может быть определено по формуле

$$y_i(x) = \bar{y}(x) - y_i^{\delta}(x), \quad (4)$$

где $y_i^{\delta}(x)$ - частное решение неоднородного дифференциального уравнения (2) с коэффициентами $D_{ij}(\alpha_i)$, найденными по указанному правилу. Как уже указывалось выше, при действии на оболочку внешней нагрузки вместо однородного уравнения (1) следует рассмотреть соответствующее неоднородное дифференциальное уравнение, и тогда функции $\bar{y}_i(x)$ должны содержать и частные решения, соответствующие нагрузке.

Частное решение $y_i^{\delta}(x)$, входящее в формулу (4), можно естественным образом назвать дополнительным частным реше-

нием, так как оно входит в функцию (4) из-за наличия в уравнении (2) дополнительной правой части по сравнению с уравнением (1).

Дополнительное частное решение находится по формуле

$$y_z^{\delta}(x) = \sum_{\ell=2}^N [\eta(x-a_{\ell-1}) - \eta(x-a_{\ell})] y_{zn}^{\delta}(x), \quad (5)$$

где $y_{zn}^{\delta}(x) = \sum_{\ell=2}^N y_{ze}^{\delta}(x)$ - дополнительное частное решение, соответствующее элементу оболочки с номером n . Составляющие частного решения $y_{ze}^{\delta}(x)$ находятся по методу вариации произвольных постоянных [2, с. 49, ф-ла (7)] и имеют вид

$$y_{ze}^{\delta}(x) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (-1)^{n+j+i-1} \left[\frac{D_{ei}(a_{\ell})}{|W_{\ell}(x)|} |W_{\ell j}(x)| \right]_{x=a_{\ell}}^{(i-1)} y_{ij}(x), \quad (6)$$

где $|W_{\ell}(x)|$ - определитель Вронского элемента оболочки с номером " ℓ ",

$|W_{\ell j}(x)|$ - алгебраическое дополнение j -го элемента n -ой строки определителя Вронского.

Коэффициент $D_{ei}(a_{\ell})$ идентичен $D_{ij}(a_i)$, рассмотренному выше, при замене индекса i на ℓ и j на i .

Как видно из формулы (5), каждое из частных решений $y_{ze}^{\delta}(x)$ входит во все дополнительные частные решения $y_{zn}^{\delta}(x)$, соответствующие элементам оболочки с номерами $n \neq \ell$. Поэтому дополнительное частное решение всегда учитывается в граничных условиях, соответствующих краю оболочки с координатой $x=a_N$.

Следует также отметить, что дополнительное частное решение, соответствующее координате $x=a_{\ell}$, по существу представляет собой условия сопряжения оболочки в точке $x=a_{\ell}$.

Таким образом, используя зависимости (3) и (5), можно всегда построить решения для составной оболочки произвольной формы. При этом, применяя данный метод, составную оболочку не нужно разбивать на отдельные однородные элементы и обеспечивать выполнение кинематических и статических условий сопряжения соседних элементов. В результате получаем, что общее число алгебраических уравнений, которые используются для построения решения, не зависит от количества элементов, образующих составную оболочку, и всегда равняется порядку

исходных дифференциальных уравнений " и ".

Обычные же методы расчета составных оболочек дают возможность свести задачу к решению системы алгебраических уравнений, число которых пропорционально количеству элементов составной оболочки. По этой причине существующие методы расчета в процессе построения решения приводят к выполнению значительно большего числа вычислительных операций по сравнению с предложенным здесь методом дополнительных частных решений. Отсюда следует, что при использовании данного метода повышается точность решения и резко сокращается трудоемкость процесса его построения. В этом состоит большое преимущество метода по сравнению с другими методами, используемыми для решения задач теории оболочек.

Следует также отметить, что применение метода дополнительных частных решений позволяет построить ряд новых эффективных численных схем решения задач рассматриваемого типа.

В заключение укажем порядок выполнения расчетов по методу дополнительных частных решений.

1. Составляем дифференциальное уравнение (1), которое при наличии внешней нагрузки содержит также правую часть.

$\bar{y}(x)$ 2. Используя уравнение (1), записываем общее решение для рассматриваемой составной оболочки.

3. По методу неопределенных коэффициентов вычисляем величины коэффициентов $D_{2i}(a_i) = D_{2j}(a_i)$ вспомогательного дифференциального уравнения (2).

4. С помощью соотношения (5) строится дополнительное частное решение задачи. Для формирования дополнительного частного решения используется зависимость (6).

5. С учетом граничных условий задачи составляется система алгебраических уравнений для определения произвольных постоянных.

6. Если оболочка не имеет отверстия в центре либо симметрична по геометрии и нагрузке, число неизвестных произвольных постоянных уменьшается в два раза.

7. После определения произвольных постоянных по формуле (4) записывается общее решение исследуемой задачи.

Естественно, что сформулированные правила остаются в силе и при использовании метода для решения задач теории пластин.

Пример расчета

В качестве примера расчета, иллюстрирующего возможности

метода дополнительных частных решений, определим прогиб круглой пластинки, состоящей из двух участков различной жесткости.

Исходное дифференциальное уравнение такой пластинки можно привести к виду

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \left(z \frac{dw}{dz} \right) \right] = \quad (7)$$

$$= \sum_{i=1}^2 \left[\eta(x-a_i) - \eta(x-a_i) \frac{q_i z}{2 D_i} + \delta(z-a_i) B(a_i) \left(\frac{D_1}{D_2} - 1 \right) \right],$$

где q_i - интенсивность нормального давления, действующего на пластину,

D_1 и D_2 - цилиндрические жесткости,

$$B(a_i) = \left(\frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{\nu}{z} \frac{dw}{dz} \right)_{z=a_i}$$

ν - коэффициент Пуассона.

В соответствии с примечаниями к формуле (I) будет

$$\eta(x-a_1) = 1, \quad \eta(x-a_2) = 0.$$

Для нахождения решения дифференциального уравнения (7) можно воспользоваться методом последовательного интегрирования исходного дифференциального уравнения, рассмотренного в работе [1]. При этом нужно принять во внимание соотношения

$$\begin{cases} \int \delta(x-a_i) \varphi(x) dx = \eta(x-a_i) \varphi(a_i); \\ \int \eta(x-a_i) \varphi(x) dx = \eta(x-a_i) \int_{a_i}^x \varphi(x) dx, \end{cases} \quad (8)$$

которые, например, приведены в статье [2, с. 47].

В формулах (8) предполагается, что функция $\varphi(x)$ непрерывна на рассматриваемом промежутке вместе со всеми своими производными до требуемого в рассматриваемой задаче порядка.

Используя указанный метод, в результате последовательного интегрирования уравнения (7) с учетом соотношений (8) получим следующее выражение для прогиба пластинки:

$$\begin{aligned} w = & \left(\frac{q_1 z^4}{64 D_1} + C_1 \frac{z^2}{4} + C_2 \right) + \eta(z-b) \frac{q_2}{64} \left(\frac{1}{D_2} - \frac{1}{D_1} \right) \cdot \\ & \cdot \left[(z^4 - 2b^4) + b^2 z^2 (2 - 1) - 2b^4 (1 + \nu) \frac{z}{b} \right] + \\ & + \eta(z-b) \frac{C_1}{8} (1 + \nu) \left[(z^2 - b^2) - 2b^2 \ln \frac{z}{b} \right] \left(\frac{D_1}{D_2} - 1 \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь учтено, что $a_1 = b$ и

$$B(a_1) = \frac{C_1}{2} (1+\nu) - \frac{C_2}{b^2} (1-\nu) + (3+\nu) \frac{qb^2}{16D_1} \quad (10)$$

Кроме того, произвольная постоянная, входящая в выражение для прогиба в виде $C_2 \ln r$ для пластинки, не имеющей отверстия в центре, должна быть положена равной нулю.

Воспользуемся теперь для построения решения методом дополнительных частных решений.

Прежде всего заметим, что из уравнения (7) можно получить решения $\bar{y}(x)$. Поскольку пластинка содержит два участка, легко показать, что $\bar{y}(x)$ имеет вид

$$\bar{y}(x) = C_1 \frac{r^2}{4} + C_2 \ln r + C_3 + \eta(r-b) \frac{B(b)}{2r} (r^2 - b^2) \left(\frac{D_2}{D_1} - 1 \right) + \quad (11) \\ + \frac{qr^4}{64D_2} - \eta(r-b) \left(\frac{1}{D_2} - \frac{1}{D_1} \right) \frac{qr^4}{64}.$$

Как уже говорилось выше, при формировании формулы (3) функция должна содержать не только решение соответствующей однородной задачи, но и частные решения, учитывающие действие внешней нагрузки. В данном случае действие распределенного давления учитывается в формуле (11) членами, подчеркнутыми волнистой чертой.

Как видно из соотношения (10), параметр $B(b)$ содержит не только давление q , но и произвольные постоянные C_1 и C_2 .

Перейдем к нахождению дополнительного частного решения $y_r^{\delta}(x)$. Для этого можно было бы воспользоваться формулой (6). Однако в данном случае его можно получить, подставив $y_r^{\delta}(x)$ в левую часть уравнения (7) и сохранив после выполнения дифференцирования слагаемые, содержащие дельта-функцию и её производные. Тогда получим

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d y_r^{\delta}(x)}{dr} \right) \right] = \left(\frac{1}{D_2} - \frac{1}{D_1} \right) \left[\delta(r-b) \frac{15}{64} q b^2 + \quad (12) \right. \\ \left. \delta(r-b) \left(1 - \frac{1}{4} \frac{b}{r} \right) \frac{qa^3}{16} + \delta''(r-a) \frac{qa^4}{64} \right].$$

С учетом фильтрующего свойства первой производной от дельта-функции

$$\frac{1}{4} \frac{a}{r} \delta'(r-a) = \frac{1}{4} \delta'(r-a) - \frac{1}{4a} \delta(r-a)$$

уравнение (I2) преобразуем к виду

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d y_r^{\delta}(x)}{dr} \right) \right] = \left(\frac{1}{D_2} - \frac{1}{D_1} \right) \left[\delta(r-b) \frac{q b^2}{4} + \delta(r-b) \frac{5}{64} \frac{q b^3}{64} + \delta'(r-b) \frac{q b^4}{64} \right]. \quad (I3)$$

Последовательно интегрируя зависимость (I3), после преобразований будем иметь

$$y_r^{\delta}(x) = \delta(r-b) \left(\frac{1}{D_2} - \frac{1}{D_1} \right) \frac{q b^4}{64} \left(1 + 4 \frac{r^2}{b^2} - 4 - 8 \ln \frac{r}{b} + 4 \ln \frac{r}{b} \right). \quad (I4)$$

Подставляя полученное значение $y_r^{\delta}(x)$ в формулу (4), после преобразований получим выражение, совпадающее с формулой (9).

Таким образом, оба метода нахождения прогиба пластинки дают один и тот же результат. Однако применение метода последовательного интегрирования для оболочек сложной формы приводит к громоздким и вряд ли оправданным вычислениям, тогда как метод дополнительных частных решений позволяет построить эффективный вычислительный алгоритм.

Литература

1. Королев В.М., Слепов Б.И., Соколов Е.В., Метод последовательного интегрирования дифференциальных уравнений пластин и оболочек. В кн.: Строит. мех. сооружений. Межвуз. темат. сб. тр. Л., ЛИСИ, 1980, 45-51.
2. Снитко А.Н., Соколов Е.В., Методы нахождения фундаментальных решений для дифференциальных уравнений теории оболочек вращения. Сопротивление материалов и теория сооружений. Киев, КИСИ, 1984, вып. 44, 47-51.
3. Арысов Г.П., Снитко А.Н., Соколов Е.В., Расчет составных конструкций с помощью обобщенных функций. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1987, 772, 156-164.

The method of additional part solutions and its application to the calculation of composition shells

G.Aryasov, A.Snitko, E.Sokolov

Summary

In the article generalization of the above-mentioned method is considered. The calculation of the round plate is given.

О ВОПРОСЕ ПЕРЕСТАВИМОСТИ ОПЕРАЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И ВАРИИРОВАНИЯ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЯ В ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ

А. Хайтин

Таллиннский политехнический институт

В книге [3] приводятся две точки зрения на переставимость операций дифференцирования и варьирования (короче, операций d и δ). Выводится случай переставимости операций d и δ , который является обобщением этих точек зрения. Показывается, что всем этим случаям соответствуют разные по форме уравнения движения механической системы.

Вопросы, касающиеся варьирования квазикоординат, а также коммутативности операторов варьирования и дифференцирования, рассматривались в последнее время в статьях [5 - 7].

В предлагаемой статье переставимость операций d и δ рассматривается в связи с её применением в теории устойчивости движения. Полученные переставочные соотношения используются при выводе уравнений возмущенного движения механической системы.

1. Рассмотрим механическую систему, положение которой определяется n обобщенными координатами q^j , $j=1, 2, \dots, n$. Пусть её движение ограничивается m стационарными неголономными связями, уравнения которых имеют вид

$$\dot{q}^j B_j^* = 0, \quad i=1, 2, \dots, m, \quad s=n-m, \quad B_j^* = B_j^*(q^j), \quad (1.1)$$

где точка означает дифференцирование по времени. По повторяющимся индексам предполагается суммирование. Если в очередном выражении, формуле и т.д. не указаны пределы изменения индексов, то они остаются теми, которыми ранее были определены.

Для механической системы со связями вида (1.1) одной из точек зрения (Вольтерры, Намель), переставочность операций

d и δ имеет место для всех обобщенных координат, т.е.

$$d(\delta q^j) - \delta(dq^j) = 0 \quad \text{или} \quad (\delta q^j)' - \delta \dot{q}^j = 0. \quad (\text{I.2})$$

Согласно другой (Суслов, Леви-Чивита, Амальди), переставимость операций d и δ принимается только для независимых обобщенных координат

$$(\delta q^\alpha)' - \delta \dot{q}^\alpha = 0; \quad \alpha = 1, 2, \dots, s. \quad (\text{I.3})$$

Проведенное в [3] обобщение заключается в том, что переставимость операций d и δ принимается для какого-то промежуточного числа координат

$$(\delta q^\chi)' - \delta \dot{q}^\chi = 0, \quad \chi = 1, 2, \dots, s + \varepsilon, \quad 1 \leq \varepsilon < m. \quad (\text{I.3a})$$

Все эти случаи переставимости операций d и δ приводят к различным формам записи уравнений движения. Возникает вопрос: какой из них целесообразно применить при выводе уравнений возмущенного движения механической системы? Здесь имеется в виду использование в уравнениях возмущенного движения вариаций δq^j , $\delta \dot{q}^j$ и их производных в качестве возмущений координат, скоростей и т.д.

Для ответа на поставленный вопрос вычислим разность $(\delta \vec{v}_i)' - \delta \vec{v}_i$, где

$$\vec{v}_i = \dot{q}^j \vec{u}_{ij}^0, \quad (\text{I.4})$$

$$\delta \vec{v}_i = \delta q^j \vec{u}_{ij}^0, \quad (\text{I.5})$$

\vec{v}_i - скорость i -ой точки механической системы,

\vec{u}_{ij}^0 - базисный вектор, соответствующий обобщенной скорости \dot{q}^j , [1].

Имеем

$$(\delta \vec{v}_i)' - \delta \vec{v}_i = [(\delta q^j)' - \delta \dot{q}^j] \vec{u}_{ij}^0, \quad (\text{I.6})$$

где учтено, что

$$\frac{\partial \vec{u}_{ij}^0}{\partial q^k} - \frac{\partial \vec{u}_{ik}^0}{\partial q^j} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{I.7})$$

Теперь из (I.6) с учетом (I.2) получим

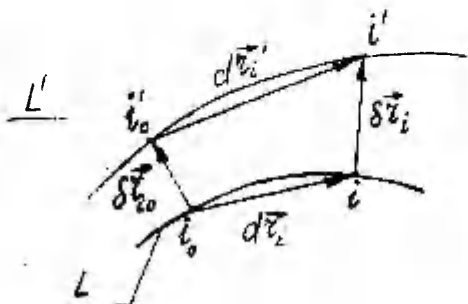
$$(\delta \vec{v}_i)' - \delta \vec{v}_i = 0. \quad (\text{I.8})$$

Если же в (I.6) подставить (I.3) или (I.3a), принимая во

внимание (I.1), то

$$(\delta \vec{v}_i)^* - \delta \vec{v}_i \neq 0. \quad (I.9)$$

Пусть возмущенное движение механической системы мало отличается от невозмущенного. Рассмотрим соответствующие траектории i -ой точки.



Фиг. I

На фиг. I имеем L' , L - траектории i -ой точки соответственно в возмущенном и невозмущенном движении системы; i_0' , i_0 - положения i -ой точки на этих траекториях в момент t_0 , i' , i - её положения в момент $t_0 + dt$. Из фиг. I видно, что $\delta \vec{r}_{i0} + d\vec{r}_i' = d\vec{r}_i + \delta \vec{r}_i$, или

$$d\vec{r}_i' - d\vec{r}_i = \delta \vec{r}_i - \delta \vec{r}_{i0}, \text{ или } \delta(d\vec{r}_i) = d(\delta \vec{r}_i), \text{ где}$$

$$\delta(d\vec{r}_i) = d\vec{r}_i' - d\vec{r}_i \quad \text{и} \quad d(\delta \vec{r}_i) = \delta \vec{r}_i - \delta \vec{r}_{i0}. \text{ Поделив}$$

полученное выражение на dt , будем иметь $(\delta \vec{v}_i) = \delta \vec{v}_i$, совпадающее с (I.8). Соотношение (I.8) является не только необходимым условием для переставимости вида (I.2), но и достаточным. Действительно, подставив (I.6) в (I.8), умножив скалярно на \vec{u}_{ir} и просуммировав по всем точкам механической системы, получим

$$[(\delta \dot{q}^j)^* - \delta \dot{q}^j] g_{jr}^0 = 0, \quad r = 1, 2, \dots, n, \quad (I.10)$$

где $g_{jr}^0 = \sum m_i \dot{u}_{ij}^0 \cdot \dot{u}_{ir}^0$ - метрический тензор системы.

Из $|g_{jr}^0| \neq 0$ следует справедливость (I.2).

Таким образом, дальнейшие выкладки будут основываться на переставимости операций d и δ по (I.2), а не (I.3) или (I.3 а), приводящие к (I.9).

Аналогично (I.8) можно получить ещё выражение

$$\delta \bar{a}_i - (\delta \bar{v}_i)^* = 0. \quad (I.II)$$

Соотношения (I.8) и (I.II) использованы в [4].

2. В статье [4] для вывода уравнений возмущенного движения (УВД) применён метод уравнивания возможной мощности (УВМ), в основании которого лежит выбор независимых параметров скоростей (среди них могут быть как обобщенные, так и квазискорости). Оказывается, что такой подход дает некоторые преимущества не только в выводе уравнений движения механических систем, движение которых может быть ограничено как голономными, так и неголономными связями [1], но и в исследовании устойчивости движения этих же систем. В данной статье дается вывод перестановочных соотношений и условий на возмущения (вариаций) с целью их учета в УВД, полученных в статье [4]. Тогда эти уравнения можно применять к механическим системам с неголономными связями, уравнения которых линейны относительно скоростей (их применимость к системам с голономными связями при этом остается).

Пусть скорость i -ой точки [1] неголономной системы

$$\bar{v}_i = v^\alpha \bar{a}_{i\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s, \quad (2.I)$$

где v^α — независимые параметры скорости, среди которых могут быть как обобщенные, так и квазискорости, $\bar{a}_{i\alpha}$ — соответствующие им базисные векторы. В случае уравнений (I.I) преобразование, связывающее независимые параметры скорости с обобщенными, представим в виде

$$v^r = B_j^r \dot{q}^j. \quad (2.2)$$

В (2.2), кроме v^α , введены ещё v^z , которые в конечном итоге приравниваются к нулю, т.е.

$$v^z = 0, \quad (2.3)$$

при этом из (2.2) получаются уравнения связей (I.I).

Полагая

$$|B_j^r| \neq 0, \quad (2.4)$$

из (2.2) получим обратное преобразование

$$\dot{q}^j = A_r^j v^r, \quad (2.5)$$

причем

$$B_j^i A_\ell^j = \delta_\ell^i, \quad \ell = 1, 2, \dots, n, \quad (2.6)$$

где δ_ℓ^i - символ Кронекера.

Отметим, что в методе УВМ первичным, как правило, является выбор независимых параметров скоростей v^α .

Упростим матрицы коэффициентов B_j^i и A_ℓ^j .

В (I.1) можно положить

$$B_\sigma^z = \delta_\sigma^z, \quad \sigma = s+1, \dots, n, \quad (2.7)$$

так как m обобщенных скоростей \dot{q}^z выражаются через независимые скорости \dot{q}^λ в виде

$$\dot{q}^z = -B_\lambda^z \dot{q}^\lambda, \quad \lambda = 1, 2, \dots, s. \quad (2.8)$$

Из (2.5) с учетом (2.3) имеем

$$\dot{q}^\lambda = A_\nu^\lambda v^\nu, \quad \nu = 1, 2, \dots, s. \quad (2.9)$$

Скорости \dot{q}^λ и v^ν можно выбрать так, что

$$|A_\nu^\lambda| \neq 0, \quad (2.10)$$

поэтому, разрешив (2.9) относительно v^ν , получим

$$v^\nu = B_\lambda^\nu \dot{q}^\lambda, \quad (2.11)$$

$$A_\nu^\lambda B_\alpha^\nu = \delta_\alpha^\lambda. \quad (2.12)$$

Сравнив (2.2) и (2.11), имеем

$$B_z^\nu = 0. \quad (2.13)$$

Аналогично сравнение (2.9) и (2.5) дает

$$A_z^\nu = 0. \quad (2.14)$$

Подставив \dot{q}^λ из (2.9) в (2.8) и сравнив с (2.5), найдем, что

$$A_\nu^z = -B_\lambda^z A_\nu^\lambda. \quad (2.15)$$

Умножив (2.15) на B_α^ν и учтя (2.12), получим

$$B_\alpha^z = -A_\nu^z B_\alpha^\nu. \quad (2.16)$$

Коэффициенты A_z^σ можно определить из (2.6), рассмотрев уравнения для δ_z^σ и учтя при этом (2.7) и (2.14), тогда получим

$$A_z^\sigma = \delta_z^\sigma. \quad (2.17)$$

Дальнейшие упрощения матриц B_j^k и A_ℓ^j получаются, если рассматривать частные случаи механических систем. Так, для наиболее распространенных систем Чаплыгина коэффициенты B_j^k и A_ℓ^j не зависят от обобщенных координат q^z , $z = s+1, \dots, n$

$$B_j^k = B_j^k(q^a) \quad \text{и} \quad A_\ell^j = A_\ell^j(q^a). \quad (2.18)$$

Кроме того, может оказаться, что часть из выбранных независимых параметров скоростей - обобщенные скорости, тогда

$$\dot{q}^a = \dot{q}^a, \quad a = 1, 2, \dots, s, \quad s < s, \quad (2.19)$$

в (2.2) и (2.5) имеем

$$B_j^a = A_j^a = \delta_j^a. \quad (2.20)$$

Остальные скорости подчиняются преобразованию

$$\dot{q}^u = A_c^u \dot{q}^c, \quad u, c = s+1, \dots, s, \quad (2.21)$$

и обратному

$$\dot{q}^c = B_u^c \dot{q}^u, \quad (2.22)$$

$$A_c^u B_u^c = \delta_c^u, \quad c = s+1, \dots, s, \quad (2.23)$$

причем

$$A_c^u = A_c^u(q^a), \quad a = 1, 2, \dots, s \quad (2.24)$$

и

$$B_u^c = B_u^c(q^a). \quad (2.25)$$

Ограничения (2.24) и (2.25) взяты из следующих соображений. Пусть координаты q^a являются для данной механической системы позиционными координатами. Тогда выберем их производные в качестве части независимых параметров скоростей (2.19). Остальные координаты q^u - циклические. Так как при стационарном движении системы позиционные скорости

равны нулю, а циклические - постоянны [2], то из (2.21) и (2.22) следует, что в этом движении

$$A_c^u = \text{const} \quad \text{и} \quad B_u^c = \text{const}. \quad (2.26)$$

Допустим, что $A_c^u = A_c^u(q^\lambda)$ и $B_u^c = B_u^c(q^\lambda)$, $\lambda = 1, 2, \dots, s$; тогда, учтя (2.26) и что $\dot{q}^u = 0$, получим

$$\dot{A}_c^u = \frac{\partial A_c^u}{\partial q^d} \dot{q}^d = 0, \quad d = s+1, \dots, s,$$

где $\dot{q}^d \neq 0$, поэтому $(\partial A_c^u / \partial q^d) = 0$, откуда следует (2.24). Аналогично можно показать справедливость (2.25).

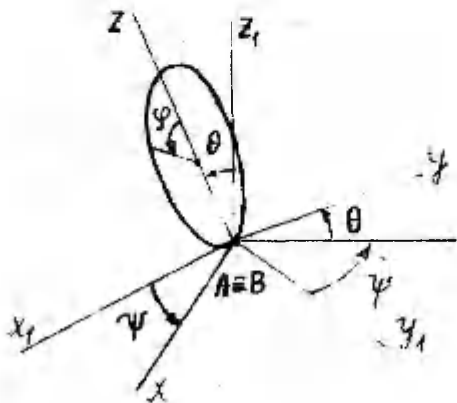
Коэффициенты из (2.15) и (2.16) с учетом (2.19)-(2.22) принимают значения

$$B_u^\sigma = -A_c^\sigma B_u^c \quad (2.27)$$

и

$$A_u^z = -B_c^z A_u^c. \quad (2.28)$$

В качестве примера рассмотрим качение диска по горизонтальной шероховатой плоскости (фиг. 2).



Фиг. 2

Здесь Bx, y, z_1 - поступательно движущиеся оси координат; Bx, z совпадает с плоскостью диска, ψ - угловая скорость диска в Bx, z . Ox_1, y_1, z_1 - неподвижные оси, параллельные Bx, y, z_1 (на фиг. 2 не показаны). Обобщенные скорости $\dot{q}^1 = \dot{x}, \dot{q}^2 = \dot{y}, \dot{q}^3 = \dot{\psi}$, $\dot{q}^4 = \dot{\theta}$. Обобщенные параметры

скорости $v^1 = \omega_1$, $v^2 = \omega_2$, $v^3 = \omega_3$, где ω_1 , ω_2 , ω_3 — составляющие вектора угловой скорости диска. А — точка диска, $\vec{v}_A = \vec{0}$. Преобразование скоростей имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{q}^1 &= v^1, & v^1 &= \dot{q}^1, \\ \dot{q}^2 &= v^2 - v^3 \operatorname{tg} q^1, & v^2 &= \dot{q}^2 + \dot{q}^3 \sin q^1, \\ \dot{q}^3 &= v^3 / \cos q^1, & v^3 &= \dot{q}^3 \cos q^1, \end{aligned}$$

где $q^1 = \theta$. Уравнения связей $\dot{x}'_B = r\dot{\varphi} \cos \psi$, $\dot{y}'_B = r\dot{\varphi} \sin \psi$ или $\dot{q}^4 - r\dot{q}^2 \cos q^3 = 0$, $\dot{q}^5 - r\dot{q}^2 \sin q^3 = 0$, откуда $v^4 = \dot{q}^4 - r\dot{q}^2 \cos q^3$, $v^5 = \dot{q}^5 - r\dot{q}^2 \sin q^3$.

Матрицы преобразования скоростей имеют вид

$$A^j_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\operatorname{tg} q^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\cos q^1 & 0 & 0 \\ 0 & r \cos q^3 & -r \operatorname{tg} q^1 \cos q^3 & 1 & 0 \\ 0 & r \sin q^3 & -r \operatorname{tg} q^1 \sin q^3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^r_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sin q^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos q^1 & 0 & 0 \\ 0 & -r \cos q^3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -r \sin q^3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. На основании (2.8) имеем

$$(\delta q^r)' = - \left[B^r_\lambda (\delta q^\lambda)' + \frac{\partial B^r_\lambda}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha \delta q^\lambda \right] \quad (3.1)$$

$$\delta \dot{q}^r = - \left(B^r_\lambda \delta \dot{q}^\lambda + \frac{\partial B^r_\lambda}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha \delta q^\lambda \right), \quad (3.2)$$

где принято во внимание (2.18).

Соотношения (1.2) при $j = \alpha$ дают (1.3), а при $j = r$ —

$$(\delta q^r)' - \delta \dot{q}^r = 0. \quad (3.3)$$

Подставляя (3.1) и (3.2) в (3.3), учтя (1.3), получим условия для кинематически независимых вариаций δq^λ

$$\left(\frac{\partial B^r_\lambda}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial B^r_\alpha}{\partial q^\lambda} \right) \dot{q}^\alpha \delta q^\lambda = 0. \quad (3.4)$$

Следует отметить, что при выводе уравнений движения механической системы условия (3.4) не учитываются. При выводе же УВД их необходимо учитывать, так как δq^{λ} являются возмущениями, входящими в эти уравнения.

4. Перейдем теперь в (1.2) к независимым параметрам скорости v^{ν} . Из (2.9) имеем

$$\delta q^{\lambda} = A_{\nu}^{\lambda} \delta \pi^{\nu}, \quad (4.1)$$

где $\delta \pi^{\nu}$ — возмущения квазиординат.

Варьируя (2.9) и дифференцируя (4.1) с учетом (2.18), соответственно получим

$$\delta \dot{q}^{\lambda} = A_{\nu}^{\lambda} \delta v^{\nu} + \frac{\partial A_{\nu}^{\lambda}}{\partial q^{\alpha}} A_{\beta}^{\alpha} v^{\nu} \delta \pi^{\beta}, \quad \beta = 1, 2, \dots, s, \quad (4.2)$$

$$(\delta q^{\lambda})' = A_{\nu}^{\lambda} (\delta \pi^{\nu})' + \frac{\partial A_{\nu}^{\lambda}}{\partial q^{\alpha}} A_{\beta}^{\alpha} v^{\beta} \delta \pi^{\nu}. \quad (4.3)$$

Подставив (4.2) и (4.3) в (1.2) и умножив на B_{λ}^{η} , будем иметь перестановочные соотношения в квазиординатах

$$(\delta \pi^{\eta})' - \delta v^{\eta} = \frac{\partial B_{\lambda}^{\eta}}{\partial q^{\alpha}} A_{\nu}^{\lambda} A_{\beta}^{\alpha} (v^{\beta} \delta \pi^{\nu} - v^{\nu} \delta \pi^{\beta}), \quad \eta = 1, 2, \dots, s. \quad (4.4)$$

Теперь, для того чтобы можно было применить (4.5) статьи [4] к неголономным системам, необходимо учесть соотношение

$$[(\delta \pi^{\eta})' - \delta v^{\eta}] A_{\eta}^{\alpha} = \frac{\partial A_{\beta}^{\alpha}}{\partial q^{\alpha}} A_{\nu}^{\lambda} (v^{\beta} \delta \pi^{\nu} - v^{\nu} \delta \pi^{\beta}), \quad (4.5)$$

которое получено из (3.3) с учетом (2.8), (2.9) и (2.15), или условие (3.4), имеющее в квазиординатах вид

$$\frac{\partial B_{\alpha}^{\lambda}}{\partial q^{\lambda}} A_{\beta}^{\alpha} A_{\nu}^{\lambda} (v^{\beta} \delta \pi^{\nu} - v^{\nu} \delta \pi^{\beta}) = 0, \quad (4.6)$$

где принято во внимание (2.9) и (4.1).

Формулы (4.4), (4.5) и (4.6) между собой связаны. Если, например, (4.4) умножить на A_{η}^{α} и учесть (2.15), (2.16) и (4.6), то получим (4.5).

Пусть преобразование скоростей теперь таково, что имеет место (2.19)–(2.25). В этом случае (4.4) и (4.6) принимают вид

$$(\delta \pi^{\alpha})' - \delta v^{\alpha} = 0 \quad \text{или} \quad (\delta q^{\alpha})' - \delta \dot{q}^{\alpha} = 0, \quad (4.7)$$

$$(\delta\pi^c)^* - \delta v^c = \frac{\partial B_c^u}{\partial q^a} A_d^u (v^a \delta\pi^d - v^d \delta\pi^a), \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial B_c^u}{\partial q^a} A_d^u (v^a \delta\pi^d - v^d \delta\pi^a) + \frac{\partial B_c^u}{\partial q^u} A_d^u A_d^c (v^u \delta\pi^d - v^d \delta\pi^u) = 0, \quad (4.9)$$

где $c, d, g, u = 1, 2, \dots, n$.

Если учесть (4.7) в (4.5) статьи [4], то получим

$$\gamma_{\alpha\beta}^a v^\alpha \delta\pi^\beta = 0, \quad (4.10)$$

где $\gamma_{\alpha\beta}^u = g^{a\lambda} (\Gamma_{\alpha\beta\lambda}^u - \Gamma_{\beta\alpha\lambda}^u)$, $g^{a\lambda}$ - контравариантный метрический тензор, $\Gamma_{\alpha\beta\lambda}^u$ - символ Кристоффеля. Соотношение аналогичное (4.8) следует из формулы (4.5) статьи [4] в виде

$$(\delta\pi^c)^* - \delta v^c = \gamma_{da}^c (v^a \delta\pi^d - v^d \delta\pi^a). \quad (4.11)$$

Однако здесь необходимо учесть еще (4.9) или

$$A_c^u [(\delta\pi^c)^* - \delta v^c] = \frac{\partial A_c^u}{\partial q^a} A_d^u (v^a \delta\pi^d - v^d \delta\pi^a) + \frac{\partial A_c^u}{\partial q^u} A_d^u (v^u \delta\pi^d - v^d \delta\pi^u), \quad (4.12)$$

вытекающее из (4.5).

5. Соотношение (I.II) дает переставимость операций d и δ для

$$\delta \ddot{q}^j - (\delta \dot{q}^j)^* = 0, \quad j=1, 2, \dots, n. \quad (5.1)$$

Перейдем в (5.1) к независимым параметрам скорости. Из преобразования (2.9) имеем

$$\begin{aligned} \ddot{q}^\alpha &= A_\lambda^\alpha \dot{v}^\lambda + \frac{\partial A_\lambda^\alpha}{\partial q^\beta} \dot{q}^\beta v^\lambda, \\ \delta \ddot{q}^\alpha &= A_\lambda^\alpha \delta v^\lambda + \frac{\partial A_\lambda^\alpha}{\partial q^\beta} \dot{v}^\lambda \delta q^\beta + \frac{\partial A_\lambda^\alpha}{\partial q^\beta} (v^\lambda \delta \dot{q}^\beta + \dot{q}^\beta \delta v^\lambda) + \\ &\quad + \frac{\partial^2 A_\lambda^\alpha}{\partial q^\beta \partial q^\nu} v^\lambda \delta q^\beta \dot{q}^\nu. \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\delta \dot{q}^\alpha = A_\lambda^\alpha \delta v^\lambda + \frac{\partial A_\lambda^\alpha}{\partial q^\beta} v^\lambda \delta q^\beta,$$

$$\begin{aligned}
 (\delta \dot{q}^\alpha)' &= A_{\lambda}^{\alpha} (\delta v^{\lambda})' + \frac{\partial A_{\lambda}^{\alpha}}{\partial q^{\beta}} \dot{q}^{\beta} \delta v^{\lambda} + \\
 &+ \frac{\partial A_{\lambda}^{\alpha}}{\partial q^{\beta}} [v^{\lambda} (\delta q^{\beta})' + \dot{v}^{\lambda} \delta q^{\beta}] + \\
 &+ \frac{\partial^2 A_{\lambda}^{\alpha}}{\partial q^{\nu} \partial q^{\beta}} v^{\lambda} \dot{q}^{\beta} \delta q^{\nu}, \quad (5.3)
 \end{aligned}$$

где индексы принимают значения от I до s .

Подставив (5.2) и (5.3) в (5.1), умножив на B_{α}^{ν} , получим

$$\delta v^{\nu} - (\delta v^{\nu})' = 0, \quad (5.4)$$

где принято во внимание (1.2).

6. Использование (5.4) дает возможность упростить УВД в статье [4]. Действительно, если подставить (4.5) и её производную по времени в (3.1) (оба номера из статьи [4]) и учесть (5.4), то получим

$$\begin{aligned}
 g_{\nu\alpha} (\delta \pi^{\alpha})'' + 2 \Gamma_{\beta\alpha\nu} v^{\beta} (\delta \pi^{\alpha})' + \delta \pi^{\beta} \{ (\Gamma_{\alpha\gamma\nu} + \Gamma_{\gamma\alpha\nu}) \dot{v}^{\gamma} + \\
 + [(\Gamma_{\beta\mu\nu} - \Gamma_{\mu\beta\nu}) \gamma_{\alpha}^{\mu} + \frac{\partial (\Gamma_{\alpha\eta\nu} - \Gamma_{\eta\alpha\nu})}{\partial x^{\beta}} + \\
 + \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta\nu}}{\partial x^{\eta}}] v^{\alpha} v^{\beta} \} = \delta Q_{\nu}, \quad (6.1)
 \end{aligned}$$

где необходимо принять во внимание (4.5) или (4.6); все индексы изменяются в пределах от I до s . Когда же рассматриваются системы, в которых имеют место соотношения (4.7) или (4.10) и (4.11), то вместе (6.1) следует использовать следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
 (\delta \pi^{\alpha})'' + g^{\alpha\nu} \{ (\Gamma_{\beta\mu\nu} + \Gamma_{\mu\beta\nu}) v^{\beta} (\delta \pi^{\alpha})' + \delta \pi^{\beta} [(\Gamma_{\alpha\gamma\nu} + \Gamma_{\gamma\alpha\nu}) \dot{v}^{\gamma} + \\
 + (\Gamma_{\beta\mu\nu} + \Gamma_{\mu\beta\nu}) \gamma_{\alpha}^{\mu} v^{\alpha} v^{\beta} + \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta\nu}}{\partial x^{\eta}} v^{\alpha} v^{\beta} \} = \\
 = g^{\alpha\nu} \delta Q_{\nu}, \quad (6.2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\delta \pi^{\alpha})'' + g^{\alpha\nu} \{ 2 \Gamma_{\beta\alpha\nu} v^{\beta} (\delta \pi^{\alpha})' + \delta \pi^{\beta} [(\Gamma_{\alpha\gamma\nu} + \Gamma_{\gamma\alpha\nu}) \dot{v}^{\gamma} + \\
 + ((\Gamma_{\beta\mu\nu} - \Gamma_{\mu\beta\nu}) \gamma_{\alpha}^{\mu} + \frac{\partial (\Gamma_{\alpha\eta\nu} - \Gamma_{\eta\alpha\nu})}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta\nu}}{\partial x^{\eta}}) v^{\alpha} v^{\beta} \} = \\
 = g^{\alpha\nu} \delta Q_{\nu}. \quad (6.3)
 \end{aligned}$$

В (6.2) и (6.3) индексы принимают следующие значения:

$a = 1, 2, \dots, \varepsilon$; $u, c = \varepsilon + 1, \dots, \delta$; остальные — от 1 до δ .

Отметим, что возмущения квазикоординат в статье [4] обозначались просто π^j , здесь же их обозначение $\delta\pi^j$.

В задаче качения диска по горизонтальной плоскости на основе уравнений (6.2) и (6.3) получаются УВД, которые для случая стационарного движения будут дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами. Решение характеристического уравнения дает шесть корней, из которых четыре — нулевые. Вывод об устойчивости двумерного многообразия стационарных движений диска в границах области, определяемой ненулевыми корнями, совпадает с тем, который дан в [3]. Трактовка нулевых корней имеет здесь некоторое отличие. Пусть k — число нулевых корней, а m — размерность многообразия стационарных движений системы. Тогда согласно теории в [3] случай, когда $k > m$, следует рассматривать как критический. В книге [3] оперируют с УВД, являющимися линейными уравнениями первого приближения. Здесь же получили УВД линейные по своей структуре. Поэтому при $k > m$ нулевые корни, не являясь признаком критичности, позволяют определить устойчивость всех координат и скоростей. Так, в упомянутой выше задаче обнаруживается, что в области устойчивости стационарных движений диска возмущения $\delta\pi^2$ и $\delta\pi^3$ будут со временем возрастать.

Литература

1. Гольст Г., Рельвик Х., Сильде О., Основные вопросы аналитической механики. Таллинн, „Валгус“, 1979.
2. Емельянова И.С., К определению циклических координат и стационарных движений механических систем. В сб.: Динамика систем. Горький, изд-во Горьковского ун-та, 1974, вып.3, 117-130.
3. Неймарк И.Д., Фуфаев Н.А., Динамика неавтономных систем. М., „Наука“, 1967.
4. Хайтин А., Применение уравнения возможной мощности к исследованию устойчивости движения механических систем. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1965, 721, 109-117.
5. Lukoševič Mirjana M., Čović Vukman M., O variranjā kvazi-koordinata.

36. рад. Мат. ин-т. Београд, 1984, №4, 131-137.
6. Čević Vukman M., O komutativnosti operators variranja i diferenciranja i mehanici neholonomnih sistema.
36. рад. Мат. ин-т. Београд, 1984, №4, 53-59.
7. Čević Vukman M., Lukočević Mirjana M., Prilog analitič-koj mehanici neholonomnih sistema.
Глас. Срп. Акад. наука и уметн. Од. прир.-мат. наука, 1986, 346, №50, 9-18.

About commutation of differentiation and variation operations and its application in the motion stability theory

A. Haitin

Summary

The paper deals with the commutation of differentiation and variation operation in connection with its application in the motion stability theory. The commutation formulas which are used to derive the mechanical system perturbed motion equations have been obtained.

АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО ОБРАЩЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА В ЗАДАЧАХ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

Г.Арясов, А.Снитко, В.Улитин

Таллиннский политехнический институт

Преобразование Лапласа часто используется при решении широкого класса задач стационарной и нестационарной вязкоупругости [1, 2, 3]. Применение преобразования Лапласа существенно упрощает решение этих задач прежде всего потому, что позволяет свести операторные соотношения наследственной теории упругости к простым алгебраическим соотношениям. Для этого достаточно иметь изображения по Лапласу ядер релаксации и ползучести. С помощью обращения преобразования Лапласа могут быть найдены спектры ядер ползучести и релаксации [2]. Кроме того, преобразование Лапласа может быть использовано при определении параметров ядер ползучести и релаксации [3]. Для решения задачи наследственной упругости нужно решить соответствующую задачу упругости, заменить в изображениях упругие константы на изображения операторов, а затем перейти от изображений к оригиналам. Наибольшую трудность в решении задачи вызывает операция обращения преобразования Лапласа. Объясняется это тем, что эта задача относится к классу некорректных задач [4], а известные алгоритмы её решения в целом ряде случаев неустойчивы [5]. Для получения достаточно точного результата при решении технических задач может быть использован алгоритм численного выполнения преобразования Лапласа, основанный на методах математического программирования [6]. Целью настоящей работы является расширение указанного алгоритма на решение задач вязкоупругости.

Рассмотрим общие черты такого алгоритма, считая, что задача в целом решается численно. Поскольку в целом ряде случаев возникает необходимость численного выполнения прямого преобразования и алгоритм для выполнения этой операции такой же, как и для выполнения обращения, будем рассматривать эти две операции одновременно. Пусть в некоторой узловой точке тела P требуется выполнить одну из указанных операций для некоторой функции $u(P, \tau)$. В обоих случаях искомая функция u аппроксимируется в данной точке P некоторой функцией $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \tau)$, содержащей n параметров $\{\alpha_j\}$ и имеющей известное изображение $F(\alpha_1, \dots, \alpha_n, s)$. При выполнении прямого преобразования будем считать, что извес-

тен ряд значений искомой функции $u_i = u(\tau_i)$, ($i=1, 2, \dots, m_\tau$), а при выполнении обращения — что известен ряд значений изображения этой функции $U_i = U(s_i)$, ($i=1, 2, \dots, m_s$). Естественно, что $m_\tau \geq n$, $m_s \geq n$. Введем некоторую метрику

ρ для оценки отклонения аппроксимирующей функции от искомой и найдем значения параметров α_j из условия минимума

ρ . При выполнении прямого преобразования и обращения эти условия будут иметь вид

$$\min_{\alpha_j} \rho[f(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \tau_i), \{u_i\}], \quad (1)$$

$$\min_{\alpha_j} \rho[F(\alpha_1, \dots, \alpha_n, s_i), \{U_i\}]. \quad (2)$$

Определив из этих условий $\{\alpha_j\}$, мы находим функции f и F и решаем таким образом в первом случае задачу преобразования, а во втором случае — задачу обращения. В обоих случаях задача сводится к задаче математического программирования по определению глобального минимума функции ρ . Необходимость определения именно глобального минимума диктуется тем, что в пространстве преобразований возможно существование близких кривых, которым отвечают существенно различные оригиналы. Успех решения задачи в значительной степени определяется удачным выбором аппроксимирующей функции, метрики ρ и набора значений $\{\tau_i\}$ или $\{s_i\}$. Так, аппроксимирующие функции должны при минимальном количестве параметров достаточно точно отражать все особенности искомой функции.

Основные и принципиальные отличия предлагаемого алгоритма от традиционных [4, 5] состоят в следующем:

1. Аппроксимирующие функции в общем случае представляют собой некоторые нелинейные выражения, что позволяет описать достаточно сложные зависимости при минимальном количестве параметров. Это играет решающую роль, в частности, при описании ядер ползучести и релаксации.
2. Количество искомых параметров n не связано жестко с количеством узловых точек m , что позволяет повышать точность решения увеличением количества узлов.
3. В вышеуказанном алгоритме не используется часто встречающееся в других случаях требование, чтобы аппроксимирующие кривые проходили через точки с

координатами (τ_i, u_i) или (S_i, U_i) . Поскольку при численном решении задачи величины u_i или U_i определяются с некоторой ошибкой, указанное требование приводит к увеличению ошибок при определении параметров α_j .

4. При выполнении обращения анализа зависимости $F(s)$ позволяет выделить области значений S , при которых влияние одних параметров преобладает, а влиянием других можно пренебречь. Это позволяет решать задачу поэтапно и существенно снижает объем вычислений.

Метрику ρ можно выбирать в зависимости от особенностей решаемой задачи. Во многих случаях наиболее естественной метрикой является сумма квадратов отклонений

$$S = \sum_{i=1}^n [F(s_i) - U_i]^2. \quad (3)$$

(Здесь и далее для краткости будем приводить зависимости для случая выполнения обращения).

Поскольку функция $U(s)$ во многих случаях в заданном диапазоне изменения S изменяется на несколько порядков, для выравнивания величины отклонений в зоне её малых и больших значений необходимо в качестве метрики использовать сумму квадратов относительных отклонений

$$S = \sum_{i=1}^n \left[\frac{F(s_i)}{U_i} - 1 \right]^2. \quad (4)$$

При программировании зависимости (4) естественно должна быть предусмотрена защита от деления на нуль.

В задачах вязкоупругости достаточно общие выражения аппроксимирующих функций можно представить в виде

$$f(\tau) = \sum_{j=1}^{n_0} a_j q_j(b_j, \tau) e^{-c_j \tau}, \quad (5)$$

$$F(s) = \sum_{j=1}^{n_0} a_j Q_j(b_j, s + c_j), \quad (6)$$

где q_j — некоторые функции с изображением Q_j . Эти выражения содержат $3n_0$ неизвестных параметров. Из них могут быть получены частные выражения, отвечающие условиям той или иной задачи.

При выполнении преобразования Лапласа для ядер полу-

чести и релаксации аппроксимация с помощью выражений (5) и (6) позволяет получить известные зависимости [2]

$$K = \sum_{j=1}^{n_0} K_j \exp(\beta_j, \tau), \quad (7)$$

$$\bar{K} = \sum_{j=1}^{n_0} \frac{K_j}{s + \beta_j}. \quad (8)$$

Для поиска минимума любого из выражений

(1)–(4) могут быть использованы известные алгоритмы поиска глобального минимума. Одним из достаточно простых и экономичных является алгоритм с переменным шагом сетки в пространстве параметров [6]. В этом случае в результате анализа зависимости $F(s)$ назначается некоторое количество узлов k_0 , на которое разбивается область изменения каждого из параметров (обычно $k_0 = 20 \div 30$). После того, как на такой сетке найдена точка, отвечающая минимуму величины F , вокруг неё образуется n -мерный куб добавлением k_Δ узлов во все стороны ($k_\Delta = 2 \div 3$). Стороны полученного куба, в свою очередь, разбиваются на k_0 узлов, и поиск повторяется. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность. Количество таких шагов до достижения требуемой точности может быть найдено из выражения

$$k_s = \ln \frac{k_r}{2k_\Delta} \left(\ln \frac{k_0}{2k_\Delta} \right)^{-1}, \quad (9)$$

где k_r – количество узлов, на которое нужно было бы разбить область изменения каждого параметра для достижения требуемой точности (обычно $k_r = 10^3$). При таком алгоритме, как правило, $k_s = 5 \div 6$.

Однако, как бы экономично не был построен алгоритм, поиск минимума в пространстве параметров требует выполнения большого количества операций и, следовательно, связан с затратами большого количества машинного времени. Поэтому всегда необходим анализ зависимости $F(s)$ в целях возможного упрощения решения задачи. В частности, если в выражениях (5) и (6) известны величины b_j и c_j , то они становятся линейными функциями относительно параметров a_j , и задача может быть сведена к решению системы линейных уравнений. Изображение искомой функции в этом случае можно представить в виде

$$F(s_i) = \sum_{j=1}^n a_j g_{ij}, \quad (10)$$

где $g_{ij} = G(s_i + c_j)$.

Множители при коэффициентах a_j в выражении (10) образуют матрицу с размерами $m \times n$, поскольку

$$i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; G = [g_{ij}].$$

Будем использовать метрику (4) и найдем значения коэффициентов a_j из условия стационарности функции S_0 ,

$$S_0 = \sum_{i=1}^m [\sum_{j=1}^n U_i^{-1} g_{ij} a_j - 1]^2,$$

$$\frac{\partial S_0}{\partial a_k} = 2 \sum_{i=1}^m [\sum_{j=1}^n U_i^{-1} g_{ij} a_j - 1] U_i^{-1} g_{ik} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n U_i^{-1} g_{ij} a_j = \sum_{i=1}^m U_i^{-1} g_{ik}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (II)$$

Выражение (II) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно параметров a_j , которую можно представить в матричной форме

$$W \cdot \bar{A} = \bar{B}. \quad (I2)$$

В этом выражении \bar{A} - вектор - столбец искоемых коэффициентов, \bar{B} - вектор правых частей, а W - матрица с размерами $n \times n$

$$\bar{A} = \{a_j\}^T, \quad W = Z^T \cdot Z. \quad (I3)$$

Матрица Z имеет одинаковую размерность с матрицей G

$$Z = [U_i g_{ij}] = G^T \cdot V, \quad V = \{U_i^{-1}\}^T \quad (I4)$$

Тогда, обозначив через E единичный вектор-столбец размером m , получим

$$\bar{B} = Z^T \cdot E_m. \quad (I5)$$

В качестве простейшего примера рассмотрим задачу о вдавливании жесткого круглого штампа с радиусом ρ в полу-

пространство. Решение такой задачи для упругого полупространства общеизвестно:

$$w = \frac{P_0(1-\nu^2)}{2\pi E}, \quad (16)$$

где w - перемещение, P_0 - давление на штамп, E, ν - упругие константы материала.

Если сила давления изменяется по закону $P = P_0 \varphi(\tau)$, то решение задачи наследственной теории упругости может быть представлено в операторной форме [1, 2]

$$w(\tau) = \frac{P_0}{2\pi E} (1-\nu^*) (1+K^*) \varphi(\tau), \quad (17)$$

где ν^* - операторный коэффициент Пуассона, K^* - оператор ползучести

$$K^* \varphi(\tau) = \int K(\tau-\tau_0) \varphi(\tau_0) d\tau_0.$$

Как показано в работе [1], операторный коэффициент Пуассона можно найти из условия неизменности модуля объемного сжатия. Используя это условие, получим

$$\nu^* = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1-2\nu}{1+K^*} \right). \quad (18)$$

С учетом зависимости (18) разложение выражения $(1-\nu^*)$ ($1+K^*$) в ряд по степеням K^* позволяет представить формулу (17) в виде

$$f(\tau) = \frac{w(\tau)}{w_0} = (1+K_\nu^*) \varphi(\tau), \quad (19)$$

$$K_\nu^* = \beta_1 K^* - \beta_2 (K^{*2} - K^{*3} + K^{*4} - \dots), \quad (20)$$

где $\beta_1 = \frac{3+(1-2\nu)^2}{4(1-\nu^2)}, \quad \beta_2 = \frac{(1-2\nu)^2}{4(1-\nu^2)}.$

Для простоты предположим, что полупространство представляет собой тело Фойхта с ядром ползучести

$$K(\tau) = \Theta_\mu c_\mu e^{-c_\mu \tau}, \quad (21)$$

$$\Theta_n = \frac{E}{E_\infty} - 1,$$

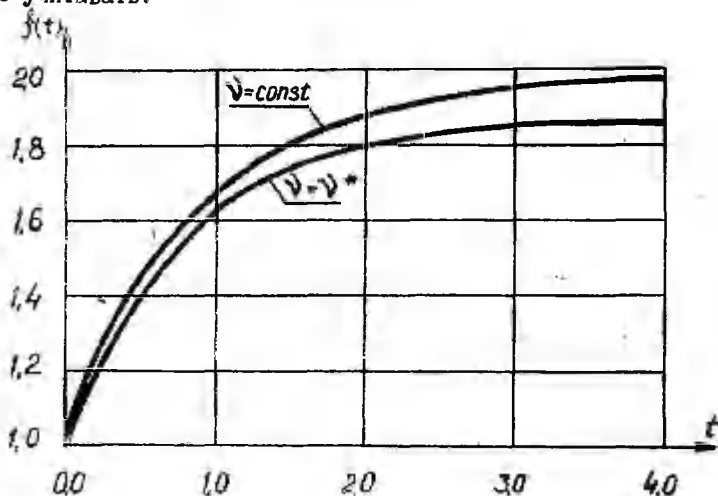
где E - мгновенный, а E_∞ - длительный модули упругости. Коэффициент затухания процесса ползучести c_n может быть выражен через время ползучести [7] $c_n = 1/\tau_n$. Первоначально рассмотрим случай, когда при $\tau = 0$ прикладывается постоянная сила P_0 . Тогда

$$\varphi(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \geq 0, \\ 0, & \tau < 0. \end{cases}$$

В этом случае решение (19) легко записывается в аналитическом виде. Введя безразмерное время $t = \tau/\tau_n$, получим

$$\begin{aligned} K^* \cdot 1 &= \Theta_n (1 - e^{-t}), \\ K^{*2} \cdot 1 &= \frac{\Theta_n^2}{2} (1 - 2e^{-t} + e^{-2t}), \\ K^{*3} \cdot 1 &= \frac{\Theta_n^3}{6} (1 - 3e^{-t} + 3e^{-2t} - e^{-3t}) \dots \end{aligned} \quad (22)$$

Для определённости положим $\Theta_n = 1$, что соответствует случаю $E/E_\infty = 2$. В этих предположениях построена зависимость (19), а также аналогичная зависимость без учета изменения коэффициента Пуассона, то есть при $K_j^* = K^*$ (фиг. 1). Сравнение их показывает, что учет изменения коэффициента Пуассона снижает величину максимальной осадки штампа примерно на 6%. Поэтому в первом приближении этот эффект можно не учитывать.



Фиг. 1

Теперь предположим, что нагружение производится по линейному закону при $t < t_n$, а затем сила принимает постоянное значение P_0 . При этом

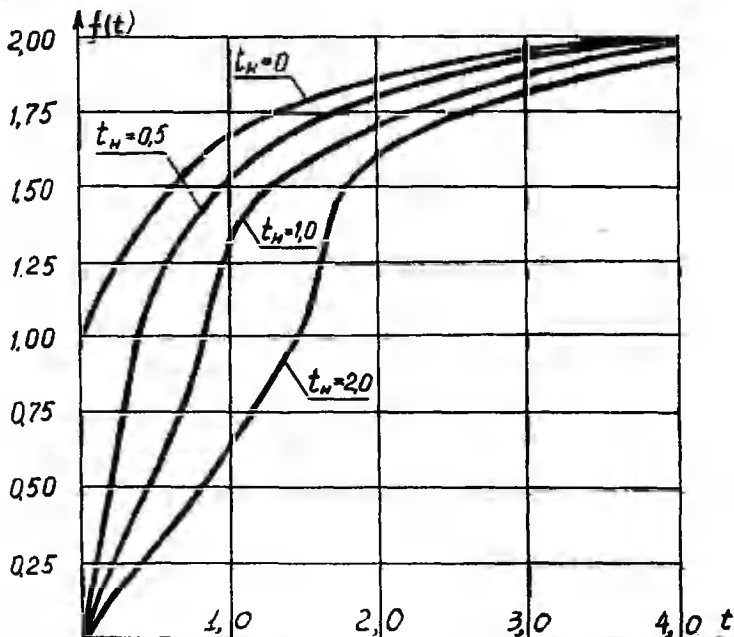
$$\varphi(t) = \begin{cases} t/t_n, & t < t_n, \\ 1, & t \geq t_n. \end{cases}$$

Аналитическое решение задачи в этом случае получим без учета изменения коэффициента Пуассона, положив в (19)

$$K_v^* = K^*$$

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{1 - e^{-t}}{t_n} + 2 \frac{t}{t_n}, & t < t_n, \\ 2 - \frac{1 - e^{-t_n}}{t_n} e^{t_n - t}, & t \geq t_n. \end{cases} \quad (23)$$

Результаты расчета по этим зависимостям (фиг. 2) показывают, что осадка штампа растет медленнее, чем в предыдущем случае, но при $t = t_n$ величина осадки больше упругой составляющей за счет накопления деформаций ползучести в процессе нагружения.



Фиг. 2

Теперь получим решение той же задачи численно, используя преобразование Лапласа. Выражение (19) в изображениях можно представить в виде [1, 8]

$$\left(\frac{\bar{w}}{u_0}\right) = \mathcal{F}_0(s) = \bar{\varphi} + \bar{K}_v \cdot \bar{\varphi}, \quad (24)$$

где
$$\bar{\varphi} = (1 - e^{-t_\mu s}) s^{-2}, \quad (25)$$

$$\bar{K}_v = \frac{B_1}{s(s+1)} + B_2 \left[\frac{1}{s(s+1)(s+2)} + \frac{1}{s(s+1)(s+2)(s+3)} + \dots \right] \quad (26)$$

Если не учитывать изменения коэффициента Пуассона, то

$$\bar{K}_v = K = \frac{1}{s(s+1)}. \quad (27)$$

Зависимость (19) будем аппроксимировать экспоненциально-степенным выражением вида

$$\frac{w(t)}{u_0} = f(t) = 2 - (2 - a_1 t - a_2 t^2) e^{-c_\mu t} \quad (28)$$

Это выражение удовлетворяет начальным условиям и условию на бесконечности $f(\infty) = 2$. В пространстве изображений получим

$$\mathcal{F}(s) = \frac{2}{s} - \frac{2}{s+c_\mu} + \frac{a_1}{(s+c_\mu)^2} + \frac{2a_2}{(s+c_\mu)^3}. \quad (29)$$

Поскольку два первых слагаемых в (29) представляют собой известные функции, вычтем их из (24) и (29) и введем обозначения

$$V(s) = \frac{a_1}{(s+c_\mu)^2} + \frac{2a_2}{(s+c_\mu)^3} = \mathcal{F}(s) - \frac{2}{s} - \frac{2}{s+c_\mu}, \quad (30)$$

$$U(s) = \mathcal{F}(s) - \frac{2}{s} - \frac{2}{s+c_\mu}.$$

Теперь можно рассматривать сумму квадратов относительных отклонений функции $V(s)$ от функции $U(s)$. При этих рассуждениях будем считать, что $c_\mu = 1$. Тогда все различия между кривыми будут определяться величиной коэффициентов a_1 и a_2 , а для их определения можно использовать уравнения (12). Функции g_{ij} в этом случае будут

$$g_{i1} = \frac{1}{(S_i + C_n)^2}, \quad g_{i2} = \frac{2}{(S_i + C_n)^3}.$$

Для решения задачи возьмем систему узловых значений параметра преобразования $\{S_i\} = (0.01; 0.1; 0.5; 1.0; 10.0)$. Таким образом, в нашем случае $m = 5$, $n = 2$. Составив и решив систему уравнений (12), получим следующие значения коэффициентов:

при $t_n = 0.5$	$\alpha_1 = 1.3528$	$\alpha_2 = -0.5009$,
при $t_n = 1.0$	$\alpha_1 = -1.2568$	$\alpha_2 = 0.4894$,
при $t_n = 2.0$	$\alpha_1 = -1.9223$	$\alpha_2 = -0.2845$.

Таблица I

t_n	t	Точные решения	Численный метод	Расхождение %
0,5	0,5	1,2130	1,1213	7,5
	1,0	1,5226	1,5776	3,6
	1,5	1,7100	1,7551	2,6
	2,0	1,8244	1,8299	3,0
	2,5	1,8940	1,8560	2,0
	3,0	1,9350	1,8800	2,9
1,0	0,5	0,6065	0,5809	4,3
	1,0	1,3779	1,2786	7,6
	1,5	1,6160	1,6542	2,4
	2,0	1,7670	1,7389	1,6
	2,5	1,8312	1,8285	0,2
	3,0	1,9140	1,9300	0,8
2,0	0,5	0,3032	0,2872	5,3
	1,0	0,6840	0,6616	3,3
	1,5	1,1112	0,0533	5,8
	2,0	1,5680	1,5633	0,3
	2,5	1,7378	1,6869	3,0
	3,0	1,8410	1,7540	5,0

Сопоставление результатов расчетов с помощью точного решения и зависимости (28) (табл. I) показывает, что численный метод решения задачи в целом дает удовлетворительные результаты.

Литература

1. Работнов Д.Н., Механика деформируемого твердого тела. М., "Наука", 1988.
2. Работнов Д.Н., Элементы наследственной механики твердых тел. М., "Наука", 1977.
3. Звонков Е.М., Малинин Н.И., Поперник Л.Х., Цейтлин Б.М., Определение характеристик ползучести линейных упруго-наследственных материалов с использованием ЭЦВМ. Изв. АН СССР. МТТ, 1968, №5, 54-58.
4. Крылов В.И., Скобля Н.С., Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. М., "Наука", 1974.
5. Рябов В.М., Численные методы обращения преобразования Лапласа. Методы вычислений. Л., изд-во ЛГУ, 1986, вып. 18, 97-113.
6. Улитин В.В., Алгоритм решения нестационарных задач упругости и термоупругости, основанный на численном преобразовании Лапласа. Прочн., устойч. и колеб. строит. констр. Межвуз. сб. тр. ЛИСИ. Л., 1987, 29-34.
7. Писаренко Г.С., Можаровский Н.С., Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. Киев, "Наук. думка", 1981.
8. Дёч Г., Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z - преобразования. М., "Наука", 1971.

Algorithm of the numerical treatment of Laplace's transformation in the problems of unstationary sticky elasticity

G. Aryasov, A. Snitko, V. Ulitin

Summary

In the article the numerical treatment of Laplace's transformation to the calculation of and unstationary problems of sticky elasticity is considered. The algorithm is founded on the methods of the mathematical programming, the results of the analytical solution being compared.

НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАНЖЕРОНА—ДЕЛЕАНУ

Х.Рельвик

Таллиннский политехнический институт

На основании монографии [2] в данной работе уравнения движения n -го порядка для механических систем в форме Манжерона—Делеану [1] обобщаются на неголономные координаты. Выведено несколько вариантов обобщенных уравнений, содержащих производные по времени от кинетической энергии, энергии ускорения и их аналогов.

1. Вывод уравнений Манжерона—Делеану в неголономных координатах

Уравнения движения для механической системы с s степенями свободы можно записать в следующем виде [2] :

$$\sum m_i \ddot{a}_i \cdot \ddot{a}_{ij} = Q_j, \quad (j=1, 2, \dots, s), \quad (I)$$

где m_i , a_i — масса и вектор ускорения i -той материальной точки, Q_j — обобщенные силы, \ddot{a}_{ij} — базисные векторы [2] в i -той точке. В уравнениях (I) и далее знак \sum обозначает суммирование по i от 1 до N . Пусть координаты являются неголономными, т.е. параметры скорости v_j не являются производными обобщенных координат ($v_j \neq \dot{q}_j$). Из выражения для кинетической энергии

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i,$$

где $\vec{v}_i = v_j \ddot{a}_{ij}$ (здесь и далее повторяющийся индекс обозначает суммирование от 1 до s), находим n -ую производную по времени

$$\dot{T} = \sum m_i \vec{v}_i \cdot \dot{\vec{a}}_i, \quad \ddot{T} = \sum m_i \vec{v}_i \cdot \ddot{\vec{v}}_i + \sum m_i \ddot{a}_i \cdot \ddot{a}_i, \quad (2)$$

$$T = \sum m_i \vec{v}_i^{(n)} \cdot \vec{v}_i^{(n)} + \sum m_i \ddot{a}_i^{(n-1)} \cdot \vec{v}_i^{(n-1)} + R,$$

$$(n=3, 4, \dots),$$

где

$$\vec{v}_i^{(n)} = v_j^{(n)} \ddot{a}_{ij} + n v_j^{(n-1)} \ddot{a}_{ij} + \dots + v_j^{(n)} \ddot{a}_{ij},$$

$$\vec{v}_i^{(n-1)} = v_j^{(n-1)} \ddot{a}_{ij} + \dots + v_j^{(n-1)} \ddot{a}_{ij}.$$

Здесь R не зависит от $\dot{v}_j^{(n)}$ и $\dot{v}_j^{(n-1)}$. Из (2) вычисляем следующую производную:

$$\frac{\partial T^{(n)}}{\partial v_j} = \sum m_i \dot{v}_i \cdot (n \dot{u}_{ij} + v_k \frac{\partial \dot{u}_{ik}}{\partial v_j^{(n-1)}}) + n \sum m_i \dot{a}_i \cdot \dot{u}_{ij} \quad (n=3,4,\dots),$$

откуда с учетом (1) получим уравнения

$$\frac{\partial T^{(n)}}{\partial v_j} - n \sum m_i \dot{v}_i \cdot \dot{u}_{ij} - \sum m_i \dot{v}_i \cdot v_k \frac{\partial \dot{u}_{ik}}{\partial \pi_j} = n Q_j, \quad (3)$$

где π_j — неголономные координаты, т.е. $\dot{\pi}_j = \dot{v}_j \neq \dot{q}_j$. Здесь учтено, что [2]

$$\frac{\partial \dot{u}_{ik}}{\partial v_j^{(n-1)}} = \frac{\partial \dot{u}_{ik}}{\partial \pi_j}$$

Как и в работе [2], предположим, что частная производная по координате от базисного вектора выражается следующим образом:

$$\frac{\partial \dot{u}_{ik}}{\partial \pi_j} = \frac{\partial \dot{u}_{ij}}{\partial \pi_k} + \gamma_{jk}^i \dot{u}_{is},$$

где γ_{jk}^i — коэффициенты неголономности. Тогда (3) принимает вид

$$\frac{\partial T^{(n)}}{\partial v_j} - (n+1) \sum m_i \dot{v}_i \cdot \dot{u}_{ij} - \frac{\partial T}{\partial v_j} \gamma_{jk}^s v_k = n Q_j. \quad (4)$$

Для второго члена левой части (4) имеем

$$\sum m_i \dot{v}_i \cdot \dot{u}_{ij} = \frac{\partial T}{\partial \pi_j} - \frac{\partial T}{\partial v_s} \gamma_{jk}^s v_k,$$

так как

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \pi_j} &= \sum m_i \dot{v}_i \cdot \frac{\partial \dot{v}_j}{\partial \pi_j} = \sum m_i \dot{v}_i \cdot v_k \left(\frac{\partial \dot{u}_{ij}}{\partial \pi_k} + \gamma_{jk}^s \dot{u}_{is} \right) = \\ &= \sum m_i \dot{v}_i \cdot \dot{u}_{ij} + \frac{\partial T}{\partial v_s} \gamma_{jk}^s v_k. \end{aligned}$$

Поэтому уравнения (4) принимают вид

$$\frac{1}{n} \left[\frac{\partial T^{(n)}}{\partial v_j^{(n-1)}} - (n+1) \frac{\partial T}{\partial v_j} \right] - \frac{\partial T}{\partial v_s} \gamma_{jk}^s v_k = Q_j \quad (5)$$

($n=1, 2, \dots$).

Уравнения (5) являются уравнениями Манжерона—Делеану [1] в неголономных координатах. Аналогично работе [3] уравнения (5) могут быть представлены также в виде

$$\frac{1}{n-2} \left[(n+1) \frac{\partial T^{(n)}}{\partial v_j^{(n-1)}} - (n+1) \frac{\partial T^{(n)}}{\partial v_j^{(n-1)}} \right] + \frac{\partial T}{\partial v_s} \gamma_{jk}^s v_k = Q_j. \quad (6)$$

При помощи функции Ценова [5]

$$R_n = \frac{1}{n} \left[T^{(n)} - (n+1) T_0^{(n)} \right] \quad (n=1, 2, \dots),$$

где T_0 — кинетическая энергия при фиксированных скоростях \dot{q}_j , уравнению (5) можно придать вид

$$\frac{\partial R_n}{\partial v_j^{(n-1)}} + n \frac{\partial R_n}{\partial v_s} \gamma_{jk}^s v_k = Q_j.$$

2. Уравнения, содержащие производные по времени от энергии ускорения и других аналогов кинетической энергии

В работе [4] введены в рассмотрение функции

$$V^{l,n} = \frac{1}{2} \sum m_i \frac{(l)}{\dot{v}_i} \cdot \frac{(n)}{\dot{v}_i}.$$

Пользуясь этими функциями, можно составить бесконечно большое множество уравнений движения высшего порядка для механических систем. Часть уравнений из этого множества приведены в работе [4]. Представим здесь еще следующие уравнения:

$$\frac{\partial U_n}{\partial v_j^{(n)}} + (n+1) \frac{\partial U_n}{\partial v_s} \gamma_{jk}^s v_k = Q_j \quad (n=1, 2, \dots),$$

где

$$U_1 = \dot{V}^{01} - 3 \dot{V}_0^{01}, \quad U_n = 2[\dot{V}^{0n} - (n+2) \dot{V}_0^{0n}] \quad (n > 1).$$

Здесь

$$V_0^{l,n} = \frac{1}{2} \sum m_i \frac{(l)}{\vec{v}_i} \cdot \frac{(n)}{\vec{v}_i},$$

где $\frac{(l)}{\vec{v}_i} = v_j \vec{u}_{ij}$, $\frac{(n)}{\vec{v}_i} = \vec{a}_i = v_j \vec{u}_{ij}$, $\frac{(n)}{\vec{v}_i} = v_j \vec{u}_{ij}$.
(параметры считаются фиксированными). Уравнениям (6) можно придать вид

$$\frac{1}{n-2} \left[(n+2) \frac{\partial (2V_0^{n,2})}{\partial v_j^{(2)}} - (2+2) \frac{\partial (2V_0^{n,n})}{\partial v_j^{(n)}} \right] - \frac{\partial V_0^{n,0}}{\partial v_j} \gamma_{jk}^n v_k = Q_j, \quad (7)$$

что имеет место при $n > 2$. Если $n = 1$, то вместо (7) имеем

$$\frac{1}{2n+1} \left[(n+2) \frac{\partial (2V_0^{n,1})}{\partial v_j^{(1)}} - 3 \frac{\partial (2V_0^{n,n})}{\partial v_j^{(n)}} - (n-1) \frac{\partial V_0^{n,0}}{\partial v_j} \gamma_{jk}^n v_k \right] = Q_j.$$

Можно получить уравнения, не содержащие коэффициентов неголомности, как, например, следующие:

$$\frac{1}{k \pm l} \left[k \frac{\partial S^{(n)}}{\partial v_j^{(n+1)}} \pm l \frac{\partial S^{(2)}}{\partial v_j^{(2+1)}} \right] = Q_j, \quad (8)$$

$$\frac{1}{k \pm l} \left[k \frac{\partial (2V_0^{n,n})}{\partial v_j^{(n+1)}} \pm l \frac{\partial (2V_0^{2,2})}{\partial v_j^{(2+1)}} \right] = Q_j,$$

где $V_0^{n,1} = S^{(n)}$ — энергия ускорения, k, l — натуральные числа, причем в случае знака минус должно быть $k > l$.

Можно получить и такие уравнения:

$$\frac{1}{\delta D - \gamma C + \beta B - \alpha A} \left[\alpha A \frac{\partial T^{(n)}}{\partial v_j^{(n-1)}} - \beta B \frac{\partial T^{(n)}}{\partial v_j^{(n-1)}} + \right. \\ \left. + \gamma C \frac{\partial T^{(2)}}{\partial v_j^{(2-1)}} - \delta D \frac{\partial T^{(t)}}{\partial v_j^{(t-1)}} \right] + \frac{\partial T}{\partial v_j} \gamma_{jk}^n v_k = Q_j \quad (9)$$

где $\delta = \alpha - \beta + \gamma$, а α, β, γ — произвольные натуральные числа,

$$\begin{aligned} A &= (p+1)(z+1)(t+1), & B &= (n+1)(z+1)(t+1), \\ C &= (n+1)(p+1)(t+1), & D &= (n+1)(p+1)(z+1), \end{aligned} \quad (10)$$

а также

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha A_1 - \beta B_1 + \gamma C_1 - \delta D_1} \left[\alpha A_1 \frac{\partial(2\dot{V}^{qn})}{\partial \dot{v}_j^{(n)}} - \beta B_1 \frac{\partial(2\dot{V}^{qn})}{\partial \dot{v}_j^{(n)}} + \right. \\ & \left. + \gamma C_1 \frac{\partial(2\dot{V}^{qz})}{\partial \dot{v}_j^{(z)}} - \delta D_1 \frac{\partial(2\dot{V}^{qt})}{\partial \dot{v}_j^{(t)}} \right] - \frac{\partial V^{q0}}{\partial v_j} \gamma_{jk}^s v_k = Q_j \\ & (n > p > z > t > 1), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= (p+2)(z+2)(t+2), & B_1 &= (n+2)(z+2)(t+2), \\ C_1 &= (n+2)(p+2)(t+2), & D_1 &= (n+2)(p+2)(z+2), \end{aligned}$$

или в частном случае $t = 1$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha A_2 - \beta B_2 + \gamma C_2 - \delta D_2} \left[\alpha A_2 \frac{\partial(2\dot{V}^{qn})}{\partial \dot{v}_j^{(n)}} - \beta B_2 \frac{\partial(2\dot{V}^{qn})}{\partial \dot{v}_j^{(n)}} + \right. \\ & \left. + \gamma C_2 \frac{\partial(2\dot{V}^{qz})}{\partial \dot{v}_j^{(z)}} - \delta D_2 \frac{\partial(2\dot{V}^{qt})}{\partial \dot{v}_j^{(t)}} - \right. \\ & \left. - (\alpha A_2 - \beta B_2 + \gamma C_2 - \delta D_2) \frac{\partial V^{q0}}{\partial v_j} \gamma_{jk}^s v_k \right] = Q_j, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} A_2 &= 3(p+2)(z+2), & B_2 &= 3(n+2)(z+2), \\ C_2 &= 3(n+2)(p+2), & D_2 &= (n+2)(p+2)(z+2). \end{aligned} \quad (12)$$

3. Примеры применения полученных уравнений при плоском движении твердого тела

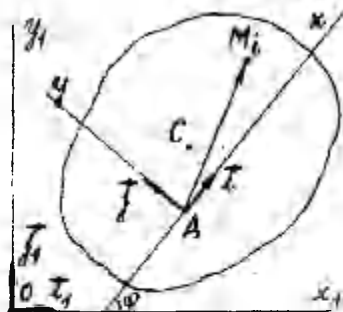
Пусть координатные оси Ax неизменно связаны с телом. Выберем произвольную точку A за полюс. Скорость этого полюса $\vec{v}_A = v_x \vec{e}_1 + v_y \vec{e}_2 = v_1 \vec{e} + v_2 \vec{f}$,

скорость центра масс

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \omega \times \vec{r}_{AC} = v_1 \vec{e} + v_2 \vec{f} + \omega(-y_C \vec{e} + x_C \vec{f}) \quad (13)$$

и скорость перпендикулярной точки тела

$$\vec{v}_i = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + \omega (-y_i \vec{i} + x_i \vec{j}), \quad (14)$$



Фиг. I

где $\omega = \dot{\varphi}$ (см. фиг. I), \vec{k} — единичный вектор оси z (на чертеже не показано),

$\vec{r}_i = \overline{AM}_i$, $\vec{p}_i = \overline{AC}$, v_1 и v_2 — проекции скорости полюса на оси x и y соответственно. За параметры скорости выберем квазискорости v_1 и v_2 и обобщенную скорость $\omega = \dot{\varphi}$.

Для определения коэффициентов неголономности γ_{jk}^a заметим из (13), что

$$v_1 = \omega, \quad \dot{u}_{i1} = \vec{i}, \quad \dot{u}_{i2} = \vec{j}, \quad \dot{u}_{i3} = \vec{k} \times \vec{p}_i = -y_i \vec{i} + x_i \vec{j}.$$

Найдем производные базисных векторов

$$\dot{u}_{i1} = \omega \vec{j}, \quad \dot{u}_{i2} = -\omega \vec{i}, \quad \dot{u}_{i3} = -\omega (x_i \vec{i} + y_i \vec{j}).$$

Образует разности частных производных

$$\frac{\partial \dot{u}_{i2}}{\partial v_1} - \frac{\partial \dot{u}_{i1}}{\partial v_2} = 0 = \gamma_{jk}^1 \dot{u}_{i3} = \gamma_{12}^1 \vec{i} + \gamma_{12}^2 \vec{j} + \gamma_{12}^3 \dot{u}_{i3},$$

$$\frac{\partial \dot{u}_{i3}}{\partial v_1} - \frac{\partial \dot{u}_{i1}}{\partial \omega} = -\vec{j} = \gamma_{13}^1 \vec{i} + \gamma_{13}^2 \vec{j} + \gamma_{13}^3 \dot{u}_{i3},$$

$$\frac{\partial \dot{u}_{i3}}{\partial v_2} - \frac{\partial \dot{u}_{i2}}{\partial \omega} = \vec{i} = \gamma_{23}^1 \vec{i} + \gamma_{23}^2 \vec{j} + \gamma_{23}^3 \dot{u}_{i3}.$$

Отсюда получим $\gamma_{23}^1 = 1 = -\gamma_{33}^1, \quad \gamma_{33}^2 = 1 = -\gamma_{13}^2,$

так как

Используем уравнение (5) при $n = 5$

$$\frac{1}{5} \left[\frac{\partial \vec{T}}{\partial \vec{v}_1} - 6 \frac{\partial \vec{T}}{\partial x_j} \right] + \frac{\partial \vec{T}}{\partial v_3} \gamma_{jk}^a v_k = 0_j.$$

Из выражения кинетической энергии тела

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{v}_1^2 + \dot{v}_2^2) + \frac{1}{2} J_A \dot{\omega}^2 + m \dot{v}_2 \omega x_C - m \dot{v}_1 \omega y_C \quad (I5)$$

вычислим ее пятую производную по времени

$$\ddot{T} = m (\dot{v}_1 \ddot{v}_1 + 5 \dot{v}_1 \ddot{v}_1 + \dot{v}_2 \ddot{v}_2 + 5 \dot{v}_2 \ddot{v}_2) + J_A (\dot{\omega} \ddot{\omega} + \ddot{\omega} \ddot{\omega}) +$$

$$+ m x_C [\dot{v}_2 \ddot{\omega} + \ddot{v}_2 \dot{\omega} + 5 (\dot{v}_2 \ddot{\omega} + \ddot{v}_2 \dot{\omega})] -$$

$$- m y_C [\dot{v}_1 \ddot{\omega} + \ddot{v}_1 \dot{\omega} + 5 (\dot{v}_1 \ddot{\omega} + \ddot{v}_1 \dot{\omega})] + R,$$

где R не зависит от \ddot{v}_j и $\ddot{\omega}$.

Уравнения движения принимают вид

$$m (\ddot{v}_1 - y_C \ddot{\omega} - \dot{v}_2 \dot{\omega} - x_C \dot{\omega}^2) = Q_1, \quad (I6)$$

$$m (\ddot{v}_2 + x_C \ddot{\omega} + \dot{v}_1 \dot{\omega} - y_C \dot{\omega}^2) = Q_2,$$

$$J_A \ddot{\omega} + m (\dot{v}_2 x_C \dot{\omega} + x_C \dot{v}_2 \dot{\omega} + x_C \dot{v}_1 \dot{\omega} + y_C \dot{v}_2 \dot{\omega}) = Q_3.$$

Принимая здесь $\dot{v}_2 = 0$, $\ddot{v}_2 = 0$ и $\dot{v}_1 = v$, получим известные уравнения Чаплыгина

$$m (\dot{v} - y_C \dot{\omega} - x_C \dot{\omega}^2) = Q_1,$$

$$J_A \dot{\omega} + m (-\dot{v} y_C + v \omega x_C) = Q_3$$

и для определения Q_2 уравнение

$$m x_C \dot{\omega} + m v \omega - m y_C \dot{\omega}^2 = Q_2$$

Используем теперь уравнения (9). Пусть для определенности $n = 8$, $p = 6$, $r = 2$, $t = I$, $\alpha = 6$, $\beta = 5$, $\gamma = 2$ и $\delta = 6 - 5 + 2 = 3$. Тогда по (I0) имеем

$$A = 7 \cdot 3 \cdot 2 = 42, \quad \alpha A = 252, \quad B = 9 \cdot 3 \cdot 2 = 54, \quad \beta B = 270,$$

$$C = 9 \cdot 7 \cdot 2 = 126, \quad \gamma C = 252, \quad D = 9 \cdot 7 \cdot 3 = 189, \quad \delta D = 567,$$

и уравнения (9) дают

$$\frac{1}{333} \left[252 \frac{\partial T^{(n)}}{\partial v_j^{(n-1)}} - 270 \frac{\partial T^{(n)}}{\partial v_j^{(n)}} + 252 \frac{\partial T^{(n)}}{\partial v_j^{(n-1)}} - 567 \frac{\partial T^{(n)}}{\partial v_j^{(n)}} \right] + \frac{\partial T}{\partial v_j^3} v_j^3 = Q_j$$

Из выражения для кинетической энергии (I5) вычислим ее n -ую производную по времени

$$\ddot{T} = \frac{(n)}{v_1} m (\dot{v}_1 - \omega y_C) + \frac{(n)}{v_2} m (\dot{v}_2 + \omega x_C) + \omega (J_A \dot{\omega} - m \dot{v}_1 y_C + m \dot{v}_2 x_C) +$$

$$+ \frac{(n-1)}{v_1} m (\dot{v}_1 - \dot{\omega} y_C) + \frac{(n-1)}{v_2} m (\dot{v}_2 + \dot{\omega} x_C) + \frac{(n-1)}{\omega} (J_A \dot{\omega} - m \dot{v}_1 y_C + m \dot{v}_2 x_C)$$

Отсюда найдем частные производные по $\frac{(n-1)}{v_1}$, $\frac{(n-1)}{v_2}$ и $\frac{(n-1)}{\omega}$.

Тогда из (9) мы получим знакомые уравнения (I6).

Используем еще уравнения (II). Пусть опять $n = 8$, $p = 6$, $r = 2$, $t = I$, $\alpha = 6$, $\beta = 5$, $\gamma = 2$ и $\delta = 3$. Тогда согласно (I2) имеем

$$A_2 = 96, \quad \alpha A_2 = 576, \quad B_2 = 120, \quad \beta B_2 = 600, \\ C_2 = 240, \quad \gamma C_2 = 480, \quad D_2 = 320, \quad \delta D_2 = 960,$$

и уравнения (II) дают

$$\frac{1}{-1440} \left[576 \frac{\partial (2V^{(n)})}{\partial v_j^{(n)}} - 600 \frac{\partial (2V^{(n)})}{\partial \dot{v}_j^{(n)}} + 480 \frac{\partial (2V^{(n)})}{\partial v_j^{(n)}} - \right. \\ \left. - 960 \frac{\partial (2V^{(n)})}{\partial \dot{v}_j^{(n)}} + \frac{\partial V^{(n)}}{\partial v_k} \gamma_{jk}^{(n)} v_k \right] = Q_j.$$

Вычислим функцию $2V^{(n)}$ и её производную по времени

$$2V^{(n)} = m \dot{v}_1^{(n)} (v_1 - \omega y_c) + m \dot{v}_2^{(n)} (v_2 + \omega x_c) + \omega (J_A \omega - m y_c v_1 + m x_c v_2) + \\ + n m v_1^{(n-1)} \omega (v_2 + \omega x_c) + n m v_2^{(n-1)} \omega (-v_1 + \omega y_c) - \\ - n m \omega^{(n-1)} \omega (v_1 x_c + v_2 y_c) + R, \\ 2\dot{V}^{(n)} = m \dot{v}_1^{(n+1)} (v_1 - \omega y_c) + m \dot{v}_1^{(n)} (\dot{v}_1 - \dot{\omega} y_c) + \\ + m \dot{v}_2^{(n+1)} (v_2 + \omega x_c) + m \dot{v}_2^{(n)} (\dot{v}_2 + \dot{\omega} x_c) + \\ + \omega^{(n+1)} (J_A \omega - m v_1 y_c + m v_2 x_c) + \omega^{(n)} (J_A \dot{\omega} - m \dot{v}_1 y_c + m \dot{v}_2 x_c) + \\ + n m \dot{v}_1^{(n)} \omega (v_2 + \omega x_c) + n m \dot{v}_2^{(n)} \omega (-v_1 + \omega y_c) - \\ - n m \dot{\omega}^{(n)} \omega (v_1 x_c + v_2 y_c) + R_1,$$

где R не зависит от $\dot{v}_j^{(n)}$ и $\dot{v}_j^{(n-1)}$, а R_1 — от $\dot{v}_j^{(n+1)}$ и $\dot{v}_j^{(n)}$. Вычисляя производные по $\dot{v}_1^{(n)}$, $\dot{v}_2^{(n)}$ и $\dot{\omega}^{(n)}$ и подставляя их в (II), придем опять к уравнениям (I6).

Наконец, пользуемся уравнениями (8). Ускорение произвольной точки тела вычисляется по формуле

$$\vec{a}_i = (\dot{v}_1 - \dot{\omega} y_c - v_2 \omega - \omega^2 x_c) \vec{i} + (\dot{v}_2 + \dot{\omega} x_c + v_1 \omega - \omega^2 y_c) \vec{j}$$

и энергия ускорений — по формуле

$$S = \frac{1}{2} m (\dot{v}_1^2 + \dot{v}_2^2) + \frac{1}{2} J_A \dot{\omega}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 (v_1^2 + v_2^2) + \frac{1}{2} J_A \omega^4 + \\ + m \dot{\omega} (-\dot{v}_1 y_c + \dot{v}_2 x_c) + m \omega (-\dot{v}_1 v_2 + v_1 \dot{v}_2) + m \omega^2 (-v_1 x_c - v_2 y_c) + \\ + m \dot{\omega} \omega (v_2 y_c + v_1 x_c) + m \omega^3 (v_2 x_c - v_1 y_c).$$

Из выражения энергии ускорений

$$S = \dot{v}_1^{(n+1)} m (\dot{v}_1 - \dot{\omega} y_c - v_2 \omega - \omega^2 x_c) + \dot{v}_2^{(n+1)} m (\dot{v}_2 + \dot{\omega} x_c + v_1 \omega - \omega^2 y_c) + \\ + \omega^{(n+1)} [J_A \dot{\omega} + m (-\dot{v}_1 y_c + \dot{v}_2 x_c + \omega v_2 y_c + \omega v_1 x_c)] + R,$$

где R не зависит от $q_1^{(n+1)}$, $q_2^{(n+1)}$ и $\omega^{(n+1)}$, являются частные производные $\partial S / \partial q_1^{(n+1)}$, $\partial S / \partial q_2^{(n+1)}$ и $\partial S / \partial \omega^{(n+1)}$. Подставляя эти частные производные в (8), получим снова уравнения (16). Мы видим, что в уравнениях (8) коэффициенты не голономности не нужны. А это большое преимущество во сравнении с другими соответствующими уравнениями.

Литература

1. Mangeron D., Deleanu S., Sur une classe d'equations de la mecanique analytique au sens de I. Tzénoff. C.R. Bulg. Acad. Sci., 1962, 15, № 1, 9 - 12.
2. Гольст Г., Рельвик Х., Сильде О., Основные вопросы аналитической механики. Уравнение возможной мощности. Таллинн, "Валгус", 1979.
3. Дюкич Г., Об обобщенном виде уравнений Лагранжа второго рода. ПММ, 1973, т.37, вып. I., 156-159.
4. Рельвик Х., Составление дифференциальных уравнений движения при помощи аналогов кинетической энергии. Таллинн, ТПИ, 1973, № 345, 53-67.
5. Ценов И., Об одной новой форме уравнений аналитической механики. ДАН СССР, 1953, т. 899, №1, 21-24.

Some generalizations of the
Mangeron-Deleanu equations.

H. Relvik

Summary

In the present paper the Mangeron-Deleanu n -th order equations of the movement of mechanical systems are generalized into nonholonomic coordinates. New types of generalized equations containing the derivatives from the kinetic energy, energy of acceleration and their analogues have been obtained.

СОДЕРЖАНИЕ

Ю. Лепик, Динамический изгиб жесткопластических ступенчатых балок	3
А. П. Дзюба, В. В. Костырко, Ю. Лепик, Экспериментальное исследование ступенчатых балок оптимальной конфигурации при нагружении падающей массой	18
Т. Лепикулт, Динамический расчет жесткопластических балок с фиксированными концами	25
Я. Леллеп, Ю. Маяк, Оптимальное проектирование жесткопластических кольцевых пластин при условии пластичности Мизеса	38
Я. Леллеп, Х. Хейн, Оптимальное проектирование пластических цилиндрических оболочек, подкрепленных осевыми ребрами	49
Я. Леллеп, С. Ханнус, Оптимальное проектирование жесткопластических цилиндрических оболочек кусочно-постоянной толщины	59
Г. Оленев, Изгиб жесткопластической цилиндрической оболочки под действием распределённого импульсного нагружения	68
Г. Оленев, О применении метода штрафа к задаче изгиба упругопластической пологой оболочки	85
К. Хейн, М. Хеймлоо, Проектирование непрерывной неоднородности для равнопрочных цилиндрических труб с подвижными торцами и в условиях стационарного нагрева	93
Я. Леллеп, А. Лаансоо, Приближенное решение задачи о сжатии пластической сферы	101
К. Кенк, Изгиб упрочняющейся круговой пластины на упругом основании	III
Ю. Кирс, Оптимизация динамически нагруженных упрочняющихся пластин в случае некоторых кусочно-линейных условий пластичности	II 8
Г. Арясов, А. Снитко, Е. Соколов, Метод дополнительных частных решений и его применение к расчету составных оболочек	137

А.Хайтин, К вопросу переставимости операций дифференцирования и варьирования и её применения в теории устойчивости движения	I44
Г.Арысов, А.Снитко, В.Улитин, Алгоритм численного обращения преобразования Лапласа в задачах нестационарной вязкоупругости	I57
Х.Резильвик, Некоторые обобщения уравнений Манжера-Делеану	I68

CONTENTS

Ü.Lepik, Dynamic response of rigid-plastic axially compressed beams	17
A.Dzjuba, B.Kostyrko, Ü.Lepik, Experimental investigation of stepped beams with optimal configuration struck transversely by a mass	24
T.Lepikult, Calculation of dynamically loaded rigid-plastic beams in case of fixed ends	37
J.Lellep, J.Majak, Optimal design of rigid-plastic annular plates in the case of Von Mises yield condition	48
J.Lellep, H.Hein, Optimal design of plastic cylindrical shells with longitudinal rib-reinforcement	58
J.Lellep, S.Hannus, Optimal design of rigid-plastic cylindrical shells with piece-wise constant thickness	67
G.Olenev, Bending of a rigid-plastic cylindrical shell under distributed impulsive loading	84
G.Olenev, On applying the penaltization to the problem of elastic-plastic shallow shell bending	92
K.Hein, M.Heinloo, Design of continuous nonhomogeneity for equi-strength cylindrical tubes with movable ends under steady temperature field	100
J.Lellep, A.Laansoo, An approximate solution to the problem of compression of a plastic sphere	110
K.Kenk, Bending of strainhardening circular plate resting on an elastic foundation	117

J.Kirs, Optimal design of dynamically loaded circular plates, considering the hardening of material and piece wise linear yield curves.	156
G.Aryasov, A.Snitko, E.Sokolov, The method of additional part solutions and its application to the calculation of composition shells.	143
A.Maitin, About commutation of differentiation and variation operations and its application in the motion stability theory	156
G.Aryasov, A.Snitko, V.Ulitin, Algorithm of the numerical treatment of Laplace's transformation in the problems of unstationary sticky elasticity.	167
M.Relvik, Some generalizations of the Mangeron-Deleanu equations	176

Ученые записки Тартуского государственного университета.

Выпуск 153.

ПРОЧНОСТЬ И ОПТИМИЗАЦИЯ КОНСТРУКЦИЙ.

Труды по математике и механике.

На русском языке.

Резюме на английском языке.

Тартуский государственный университет.

ЗССР, 202400, г.Тарту, ул.Оликооли, 18.

Ответственный редактор М. Хейнлоо.

Подписано к печати 12.04.1989.

МВ 01463.

Формат 60х90/16.

Бумага писчая.

Машинопись. Готапринт.

Учетно-издательских листов 9,89. Печатных листов 11,25.

Тираж 500.

Заказ № 186.

Цена 1 руб. 90 коп.

Типография ТГУ, ЗССР, 202400, г.Тарту, ул.Тийги, 78.